Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian
M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Blatt 2
Abgabe 30.10.2018

---

1. Polarkoordinaten (30 Punkte)

In zweidimensionalen kartesischen Koordinaten ist der Ortsvektor gegeben durch $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_x + y(t)\boldsymbol{e}_y$. Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung ergeben sich durch Ableitung nach der Zeit zu $\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \dot{x}(t)\boldsymbol{e}_x + \dot{y}(t)\boldsymbol{e}_y$ und $\boldsymbol{a}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \ddot{x}(t)\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}(t)\boldsymbol{e}_y$. Hier haben wir verwendet, dass die orthonormierten Basisvektoren $\boldsymbol{e}_x = (1, 0)$ und $\boldsymbol{e}_y = (0, 1)$ zeitunabhängig sind. Es kann auch sinnvoll sein ein orthonormiertes Basissystem zu verwenden, das sich mit dem Ortsvektor bewegt. Das Polarkoordinatensystem ist ein solches System. Die Transformation zu Polarkoordinaten ist definiert als

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{1}$$

mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Die beiden Basisvektoren $\boldsymbol{e}_r(t)$ und $\boldsymbol{e}_\varphi(t)$ sind nun *zeitabhängig*, da sie sich mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}(t)$ mitbewegen.

(a) Berechnen Sie $\boldsymbol{e}_r$ und $\boldsymbol{e}_\varphi$, die definiert sind als $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ und $\boldsymbol{e}_\varphi = \partial\boldsymbol{e}_r/\partial\varphi$.

(b) Drücken Sie den Ortsvektor $\boldsymbol{r}(t)$ in der Polarkoordinatenbasis $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ aus.

(c) Drücken Sie die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ in der Polarkoordinatenbasis $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ aus. Beachten Sie dass die Basisvektoren auch von der Zeit abhängen.

(d) Drücken Sie die Beschleunigung $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ in der Polarkoordinatenbasis $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ aus.

2. Bahnkurven (25 Punkte)

Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine (nicht konstante) Kurve $\boldsymbol{r}(t)$ an für die gilt, dass

(a) $d(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})/dt = 0$,

(b) $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}$,

(c) $d(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}})/dt = \boldsymbol{0}$

Hier bezeichnet $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$ das Kreuzprodukt. Beachten Sie dass der Vektor $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ senkrecht sowohl auf $\boldsymbol{a}$ als auch auf $\boldsymbol{b}$ steht.

3. Dimensionale Analyse (20 Punkte)

Bestimmen Sie folgende Größen aus Betrachtungen der dimensionalen Analyse.

(a) Was ist die Formel für die Beschleunigung, die auf ein Auto der Masse m, das sich mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius r bewegt ?

(b) Sie befinden sich auf einem Karussell, das sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse dreht. Sie bewegen sich in radialer Richtung auf dem Karussell in der x-y-Ebene mit Geschwindigkeit v. Bestimmen Sie die Beschleunigungen, die auf Sie wirken. Tipp: Unterscheiden Sie zwischen Beschleunigungen welche am Ursprung (in der Mitte des Karussells) verschwinden, und denjenigen die dort endlich bleiben.

4. Gaußintegrale (25 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \; e^{-x^2-y^2} \tag{2}$$

indem Sie Polarkoordinaten verwenden (siehe die Transformationsformel in Aufgabe 2). Denken Sie daran, dass bei einer Variablensubstitution $[x, y] \to [r(x, y), \varphi(x, y)]$ die Jacobi-Determinante im Integranden auftritt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x, y) = \int_{0}^{\infty} dr \int_{0}^{2\pi} d\varphi \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right| f[x(r, \varphi), y(r, \varphi)] \tag{3}$$

welche im zweidimensionalen Fall definiert ist als

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial r} \right| . \tag{4}$$

(b) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teil a) um

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-x^2} \tag{5}$$

zu berechnen. Falls Sie Teil a) nicht lösen konnten, nehmen Sie an, dass $I = c$ mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie nun

$$I_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-\lambda x^2} \tag{6}$$

mit reellem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) Berechnen Sie schließlich die beiden Integrale

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; x e^{-x^2}, \tag{7}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; x^2 e^{-x^2}, \tag{8}$$

wobei Sie das Ergebnis von Teil c) verwenden sollen. Tipp: Nehmen Sie an, dass Integration nach x und Ableitung nach λ vertauschen.