

Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian

Blatt 2

M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Lösungsvorschlag

1. Polarkoordinaten

(10 + 10 + 5 + 5 = 30 Punkte)

- (a) Da $\mathbf{r} = (x, y)$ lauten die Basisvektoren des Polarkoordinatensystems aufgrund der Transformationsregeln $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \cos(\varphi)\mathbf{e}_x + \sin(\varphi)\mathbf{e}_y \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = -\sin(\varphi)\mathbf{e}_x + \cos(\varphi)\mathbf{e}_y. \quad (1)$$

- (b) Der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ lautet in der Polarkoordinatenbasis

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_r, \quad (2)$$

wobei $r(t) = |\mathbf{r}(t)|$ den Abstand der Bahnkurve zum Ursprung bezeichnet (Länge des Ortsvektors).

- (c) Für die Geschwindigkeit findet man

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \quad (3)$$

wobei wir verwendet haben dass $\partial \mathbf{e}_r / \partial r = 0$ und $\partial \mathbf{e}_r / \partial \varphi = \mathbf{e}_\varphi$.

- (d) Für die Beschleunigung erhalten wir

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{r}\mathbf{e}_r + (d\mathbf{e}_r/dt)\dot{r} + \dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + (d\mathbf{e}_\varphi/dt)r\dot{\varphi} \quad (4)$$

$$= \ddot{r}\mathbf{e}_r + 2\dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\dot{\varphi}^2(-\mathbf{e}_r) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi. \quad (5)$$

2. Bahnkurven

(10 + 5 + 10 = 25 Punkte)

- (a) $d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})/dt = 2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$: Die Bahnkurve besitzt einen konstantem Radius, z.B. $\mathbf{r}(t) = R[\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\omega t)\mathbf{e}_y]$.
- (b) Die Bedingung $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ fordert, dass die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ (anti-)parallel zu $\mathbf{r}(t)$ steht. Dies ist der Fall zum Beispiel bei einer linearen Bewegung wie $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{e}_x$.
- (c) $d(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})/dt \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$, beschreibt eine Bahnkurve für die die Beschleunigung (anti-)parallel zu $\mathbf{r}$ steht. Dies ist der Fall zum Beispiel bei einer linearen Bewegung

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{e}_x \quad \text{oder trivialerweise bei} \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{e}_x \quad (6)$$

aber auch bei einer Kreisbewegung $\mathbf{r}(t) = R[\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\omega t)\mathbf{e}_y]$, da hier gilt dass $\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\omega^2\mathbf{r}(t)$.

Ganz allgemein gilt $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$ für die sogenannten Keplerbahnen einer Masse in einem Zentralkraftpotential, d.h. elliptische Bahnen, Kreisbahnen, Hyperbelbahnen und Parabelbahnen.

3. Dimensionale Analyse

(10 + 10 = 20 Punkte)

Wir bezeichnen die Dimension einer physikalischen Größe mit: Masse m , $[m] = [M]$, Länge x , $[x] = [L]$, Geschwindigkeit v , $[v] = [L]/[T]$, Winkelgeschwindigkeit ω , $[\omega] = 1/[T]$.

- (a) Die Dimension einer Beschleunigung a lautet $[a] = [L]/[T]^2$. In unserem Fall stellen wir also die Gleichung auf

$$\frac{[L]}{[T]^2} = \frac{[L]^x}{[T]^x} [M]^y [L]^z. \quad (7)$$

Daraus folgt offensichtlich $y = 0$ (keine Abhängigkeit von der Masse), sowie $x = 2$. Dann folgt aus $x + z = 1$ dass $z = -1$. Die Zentripetalbeschleunigung eines Teilchens mit Masse m und Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius r lautet also

$$a = Cv^2/r. \quad (8)$$

Hier bezeichnet C eine dimensionslose Konstante, die man nicht aus den Betrachtungen der Dimensionsanalyse bestimmen kann.

- (b) Mit den gegebenen physikalischen Größen wählen wir den Ansatz $a = C\omega^x v^y r^z$. Eine Dimensionsanalyse liefert $[L]/[T]^2 = [L]^{y+z}/[T]^{x+y}$ und somit die Gleichungen $y + z = 1$ und $x + y = 2$.

Für die Beschleunigung a_1 , die am Ursprung verschwindet erhält man $z > 0$. Daraus folgt $y = 1 - z$ und $x = 1 + z$. Somit erhalten wir eine z -abhängige Lösung:

$$a_1 = C_1 \omega^{1+z} v^{1-z} r^z. \quad (9)$$

Fordern wir noch zusätzlich dass die Beschleunigung nicht verschwindet für $v = 0$, so erhalten wir eine eindeutige Lösung der Form, $z = 1$, $x = 2$, $y = 0$, die (Zentrifugal-) Beschleunigung $a_1 = C_1 \omega^2 r$. Verwenden wir noch dass der Beschleunigungsvektor $\mathbf{a}_1$ in der Ebene des Karusells liegen wird und dass $\boldsymbol{\omega}$ entlang der Rotationsachse zeigt, so erhalten wir das Gesetz $\mathbf{a}_1 = C_1 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$.

Für die Beschleunigung a_2 , die nicht am Ursprung verschwindet (und dort auch nicht divergiert) erhalten wir sofort eine eindeutige Lösung mit $z = 0$, $y = 1$ und $x = 1$, die (Coriolis-) Beschleunigung

$$a_2 = C_2 \omega v. \quad (10)$$

Verwenden wir auch hier dass der Beschleunigungsvektor $\mathbf{a}_2$ in der Ebene des Karusells liegen wird, so erhalten wir das Gesetz $\mathbf{a}_2 = C_2 \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$.

4. Gaußintegrale

(10 + 5 + 5 + 5 = 25 Punkte)

- (a) Um das Integral zu berechnen führen wir zuerst eine Substitution zu Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ durch. Die Jacobi-Determinante (im englischen als *Jacobian* bezeichnet), die bei der Transformation auftritt, lautet $|\partial(x, y)/\partial(r, \varphi)| = r$. Das Integral nimmt damit die Form

$$I = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi r e^{-r^2} \quad (11)$$

an. Wir können die Integration über den Winkel φ einfach ausführen, da der Integrand nicht von φ abhängt. Für die Integration über r verwenden wir, dass man den Integranden als Ableitung schreiben kann

$$I = 2\pi \int_0^\infty dr r e^{-r^2} = 2\pi \int_0^\infty dr \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{d}{dr} e^{-r^2}\right) = -\pi \left[e^{-r^2}\right]_0^\infty = \pi. \quad (12)$$

(b) Da $I_0 = \sqrt{I} = \sqrt{\pi}$.

(c) Für $\lambda \leq 0$ divergiert das Integral. Für $\lambda > 0$ erhält man mit der Substitution $y = \sqrt{\lambda}x$ direkt

$$I_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-y^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}. \quad (13)$$

(d) Wir sehen sofort dass

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx x e^{-x^2} = 0 \quad (14)$$

da der Integrand eine ungerade Funktion ist, d.h. $f(x) = x e^{-x^2}$ erfüllt $f(-x) = -f(x)$. Das Integral über ganz $\mathbb{R}$ verschwindet daher.

Zur Berechnung von I_2 verwenden wir, dass wir einen Faktor x^2 im Integranden erzeugen können, indem wir $I_0(\lambda)$ nach λ ableiten

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(-\frac{d}{d\lambda} \right) e^{-\lambda x^2} \Big|_{\lambda=1}. \quad (15)$$

Nehmen wir an, dass wir Ableitung nach λ und Integration über x vertauschen können (das setzt die absolute Konvergenz des Integrals voraus), so erhalten wir

$$I_2 = \left(-\frac{d}{d\lambda} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda x^2} \Big|_{\lambda=1} = \left(-\frac{d}{d\lambda} \right) \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \Big|_{\lambda=1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (16)$$