**Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019**

**Prof. Dr. J. Schmalian**
**M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa**

**Blatt 3**
**Abgabe 6.11.2018**

---

**1. Achterbahn** (15 Punkte)

Ein Wagen fährt auf einer geneigten Spur einer reibungsfreien Achterbahn von einer Höhe $h$ los. Am unteren Ende der Spur auf ebener Erde befinde sich ein kreisförmiger Looping mit dem Radius $R$. Bestimmen Sie die minimale Höhe $h$ aus der der Wagen starten muss, damit er den Looping durchfährt, ohne die Spur zu verlassen.

**2. Geometrische Summe** (15 Punkte)

Berechnen Sie die endliche Summe $S_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} ar^{\nu} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ für reelles $a, r \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie dann den Grenzwert $n \to \infty$. Hinweis: betrachten Sie $S_n - rS_n$.

**3. Olympische Arbeit** (20 Punkte)

Die Weltrekorde der Frauen im Kugelstossen, Diskuswerfen und Speerwerfen liegen bei 22.63 m, 76.8 m und 80 m. Die Massen der verschiedenen Wurfgeräte betragen 4 kg, 1 kg und 0.6 kg. Vergleichen Sie die von den Rekordhalterinnen beim Rekordwurf verrichtete Arbeit. Nehmen Sie an, dass jede Flugbahn in einer Höhe von 1.80m über dem Boden beginnt und anfangs um 45° nach oben geneigt ist. Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand.

**4. Dämpfung** (25 Punkte)

Betrachten Sie eine kleine Stahlkugel, die aus einer Höhe $h$ über einer Stahlplatte losgelassen wird. Trifft die Kugel mit einer Geschwindigkeit $v_{\downarrow}$ auf die Platte, springt sie mit einer reduzierten Geschwindigkeit $v_{\uparrow} = fv_{\downarrow}$ wieder hoch. Bestimmen Sie den Betrag von $f$, wenn die Kugel nach einer Zeit $T$ mit dem Hüpfen aufgehört hat. Welches Ergebnis für $f$ bekommen Sie für $h = 50$ cm und $T = 30$ sec.

**5. Wegintegrale** (25 Punkte)

Wir berechnen verschiedene Wegintegrale im $\mathbb{R}^n$. Ein Wegintegral ist ein Integral entlang eines eindimensionalen Weges $C_{\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1}$ vom Anfangspunkt $\boldsymbol{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ zum Endpunkt $\boldsymbol{r}_1 \in \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen eine Parametrisierung des Weges $C_{\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1}$ mit $\boldsymbol{r}(t) \in \mathbb{R}^n$ wobei $t \in [t_0, t_1]$ reell ist. Das Wegintegral einer Grösse $\boldsymbol{f}$ ist von der Form

$$I_{C_{\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1}} \equiv \int_{C_{\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1}} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \int_{t_0}^{t_1} dt \; [d\boldsymbol{r}(t)/dt] \cdot \boldsymbol{f}[\boldsymbol{r}(t)], \tag{1}$$

und hängt im allgemeinen vom Weg $C_{\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1}$ ab. Für $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{f}$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{f} = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n$ deren Skalarprodukt.

(a) Parametriesieren Sie den direkten (gradlinigen) Weg vom Punkt $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, 0)$ zum Punkt $\boldsymbol{r}_1 = (a, b, c)$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie daraus die Bogenlänge via

$$s = \int_{t_0}^{t_1} dt \; |d\boldsymbol{r}(t)/dt|. \tag{2}$$

(b) Berechnen Sie auf gleiche Weise die Bogenlänge eines Kreises mit Radius $R$.

(c) Berechnen Sie mithilfe von Gl. (1) das Wegintegral $I_{C_{\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1}}$ über das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(x,y) = 2xy^2\boldsymbol{e}_x + x^2\boldsymbol{e}_y$ [mit $\boldsymbol{e}_x = (1,0)$ und $\boldsymbol{e}_y = (0,1)$] vom Punkt $\boldsymbol{r}_0 = (0,0)$ zum Punkt $\boldsymbol{r}_1 = (1,1)$ entlang zwei verschiedener Kurven:

  i) Entlang der Kurve $y(x) = \sqrt{x}$. Wie lautet die Parametrisierung?

  ii) Entlang der direkten Verbindung $y(x) = x$. Wie lautet die Parametrisierung?

(d) Berechnen Sie das Wegintegral über das Vektorfeld $\boldsymbol{f}$ entlang des geschlossenen Pfades auf einem Kreis mit Radius $R = 1$ um den Koordinatenursprung $(0,0)$. Zuerst müssen Sie den Pfad geeignet parametrisieren, d.h. ein geeignetes $\boldsymbol{r}(t)$ bestimmen.

($\star$) Welche Schlussfolgerung ziehen Sie aus den Ergebnissen von (c) und (d)?