

Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019**Prof. Dr. J. Schmalian****Blatt 3****M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa****Lösungsvorschlag**

1. Achterbahn

(15 Punkte)

Damit der Wagen gerade nicht aus der Spur fällt, muss am höchsten Punkt im Looping ($y = 2R$) die Zentripetalbeschleunigung (v^2/R) gerade die Erdbeschleunigung $-g$ aufheben, also $v^2(2R)/R = g$. Bei jeder schnelleren Geschwindigkeit gibt es auch eine Normalkraft der Schienen, die auf den Wagen wirken und bei jeder kleineren Geschwindigkeit wird der Wagen aus den Schienen fallen.

Die Geschwindigkeit eines Wagens in der Höhe $y = 2R$, der von der Höhe $y = h$ in Ruhe gestartet ist, errechnet sich aus dem Energieerhaltungssatz zu

$$mg(h - 2R) = \frac{m}{2}v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2g(h - 2R)}. \quad (1)$$

Aus der obigen Bedingung $v^2(2R)/R = g$ finden wir für die minimale Höhe h nun

$$2g(h - 2R)/R = g \quad \Leftrightarrow \quad h = 5R/2. \quad (2)$$

2. Geometrische Summe

(15 Punkte)

Zur Berechnung von $S_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} ar^\nu$ betrachten wir

$$S_n - rS_n = a \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} r^\nu - \sum_{\nu=0}^{n-1} r^{\nu+1} \right) = a \left(1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} r^\nu - \sum_{\nu=1}^{n-1} r^\nu - r^n \right) = a(1 - r^n), \quad (3)$$

wobei wir den Index ν in der zweiten Summe um 1 verschoben haben. Auflösen nach S_n ergibt schliesslich

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}. \quad (4)$$

Im Limes $n \rightarrow \infty$ ist diese Reihe (= Folge der endlichen Summen S_n) also nur dann konvergent wenn $|r| < 1$, und wir erhalten die Formel der geometrischen Reihe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a \sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu = \frac{a}{1 - r}. \quad (5)$$

3. Olympische Arbeit

(20 Punkte)

Die Arbeit die von den Olympionikinnen verrichtet wurde entspricht der kinetischen Energie des Wurfgeschosses am Anfang der Trajektorie. Die Trajektorie der Wurfgeschosse lässt sich schreiben als

$$x(t) = v_{0,x}t \quad (6)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,y}t + h, \quad (7)$$

wobei wir den Ursprung des Koordinatensystems an den Fuss der Athletin gesetzt haben, L die Wurfweite und $v_{0,\alpha}$ die Anfangsgeschwindigkeit in Richtung $\alpha \in \{x, y\}$ bezeichnet. Es gilt $v_{0,x} = v_0 \cos \gamma$ und $v_{0,y} = v_0 \sin \gamma$ mit $\gamma = \pi/4$, also $v_{0,x} = v_{0,y} = v_0/\sqrt{2}$. Um die anfängliche Geschwindigkeit zu bestimmen verwenden wir, dass zum Zeitpunkt t_0 des Aufpralls am Zielort gilt $x(t_0) = L$ und $y(t_0) = 0$. Daraus folgen zwei Gleichungen für t_0 nämlich

$$t_0 = \frac{L}{v_{0,x}} \quad \text{und} \quad t_0 = \frac{v_{0,y}}{g} + \sqrt{\frac{v_{0,y}^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}, \quad (8)$$

womit wir v_0 bestimmen können indem wir die entstehende Gleichung

$$v_0^2 + v_0 \sqrt{v_0^2 + 4hg} - 2Lg = 0 \quad (9)$$

nach v_0 auflösen. Dafür schieben wir den Wurzelterm auf die rechte Seite und quadrieren die Gleichung

$$(v_0^2 - 2Lg)^2 = v_0^2(v_0^2 + 4hg) \quad \Leftrightarrow \quad v_0^2 = \frac{4L^2g^2}{4Lg + 4hg} \quad \Rightarrow \quad v_0 = L\sqrt{\frac{g}{L+h}}. \quad (10)$$

Die anfängliche Energie [erzeugt durch 'Arbeit = (Muskel-)Kraft $\times$ Weg] lautet also

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v_0^2 = \frac{m}{2} \frac{L^2g}{L+h}. \quad (11)$$

Setzen wir die Zahlenwerte $h = 1.8 \text{ m}$ und $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, so erhalten wir

$$(m, L, E) \in \left\{ (4\text{kg}, 22.63\text{m}, 411\text{J}), (1\text{kg}, 76.80\text{m}, 368\text{J}), (0.6\text{kg}, 80.00\text{m}, 230\text{J}) \right\}. \quad (12)$$

Verwendet man approximativ, dass $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ so erhält man die Werte

$$(m, L, E) \in \left\{ (4\text{kg}, 22.63\text{m}, 419\text{J}), (1\text{kg}, 76.80\text{m}, 375\text{J}), (0.6\text{kg}, 80.00\text{m}, 235\text{J}) \right\}. \quad (13)$$

4. Dämpfung

(25 Punkte)

Wir berechnen erst einmal die Dauer τ_n des n -ten Hüpfvorgangs, d.h. die Zeit, die zwischen dem n -ten und dem $(n+1)$ -ten Prellvorgängen der Kugel auf der Platte vergangen ist. Bezeichnen wir mit v_n die anfängliche Geschwindigkeit nach oben, so erhalten wir aus

$$v_n - g\tau_n/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_n = 2v_n/g. \quad (14)$$

Hier haben wir verwendet dass aufgrund der Zeitumkehrinvarianz des Problems die Dauer des Hochsteigens der Kugel gleich der Dauer des Fallens ist. Die Geschwindigkeit der Kugel nach oben ist nach dem n -ten Prellvorgang gleich $v_n = f^n v_0$ mit anfänglicher Geschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2gh}$. Die Gesamtdauer $T(N)$ nach N Hüpfvorgängen ist also gegeben durch

$$T(N) = \tau_0 + \sum_{n=1}^N \tau_n = \tau_0 + \sum_{n=1}^N \frac{2v_n}{g} = \tau_0 + \sum_{n=1}^N \frac{2v_0}{g} f^n = \tau_0 + 2\tau_0 \sum_{n=1}^N f^n. \quad (15)$$

Hier bezeichnet $\tau_0 = \sqrt{2h/g}$ die Zeit bis zum ersten Prellvorgang. Dieser Ausdruck kann auf die Form der geometrischen Summe gebracht werden. Da die entsprechende

Reihe für $|f| < 1$ konvergiert, gibt es eine *endliche Zeit* T nach welcher unendlich vielen Prellvorgänge die Kugel zum Stillstand gebracht haben:

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} T(n) = \tau_0 - 2\tau_0 + \tau_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} f^\nu = -\tau_0 + \frac{2\tau_0}{1-f} = \tau_0 \frac{1+f}{1-f}. \quad (16)$$

Dabei haben wir das Ergebnis aus Aufgabe 2 verwendet. Auflösen nach f ergibt

$$f = \frac{T - \tau_0}{T + \tau_0}. \quad (17)$$

Für die Zahlenwerte $T = 30$ sec und $h = 50$ cm erhält man $f = 0.98$.

5. Wegintegrale

(5 + 5 + 10 + 5 = 25 Punkte)

- (a) Eine Parametrisierung des direkten Weges vom Punkt $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0)$ zum Punkt $\mathbf{r}_1 = (a, b, c)$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ lautet

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = t a \mathbf{e}_x + t b \mathbf{e}_y + t c \mathbf{e}_z = t(a, b, c) \quad (18)$$

mit $t \in [0, 1]$. Mit $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}_1$ lautet die Bogenlänge

$$s = \int_0^1 dt \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| = |\mathbf{r}_1| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (19)$$

- (b) Eine Parametrisierung des Halbkreises um den Ursprung mit Radius R lautet

$$\mathbf{r}(t) = R(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \quad (20)$$

mit $t \in [0, 1]$. Wir finden $\dot{\mathbf{r}}(t) = 2\pi R(-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t))$ und daher lautet die Bogenlänge

$$s = \int_0^1 dt |\dot{\mathbf{r}}(t)| = 2\pi R \int_0^1 dt \sqrt{\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)} = 2\pi R. \quad (21)$$

- (c) Für den Weg i) vom Punkt $\mathbf{r}_0 = (0, 0)$ zum Punkt $\mathbf{r}_1 = (1, 1)$ entlang der Kurve $y(x) = \sqrt{x}$ wählen wir die Parametrisierung

$$\mathbf{r}_1(t) = t^2 \mathbf{e}_x + t \mathbf{e}_y. \quad (22)$$

mit $t \in [0, 1]$. Da $\dot{\mathbf{r}}_1(t) = 2t \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$ lautet das Wegintegral über das Vektorfeld $\mathbf{f}(t) = 2t^4 \mathbf{e}_x + t^2 \mathbf{e}_y$

$$I_{C_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1}}^{(i)} = \int_{C_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{f} = \int_0^1 dt \dot{\mathbf{r}}_1(t) \cdot \mathbf{f}[x(t), y(t)] = \int_0^1 dt (4t^5 + t^4) = \frac{13}{15}. \quad (23)$$

Für den Weg ii) wählen wir die Parametrisierung

$$\mathbf{r}_2(t) = t \mathbf{e}_x + t \mathbf{e}_y \quad (24)$$

mit $t \in [0, 1]$. Da $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$ finden wir für das Wegintegral nun

$$I_{C_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1}}^{(ii)} = \int_{C_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{f} = \int_0^1 dt \dot{\mathbf{r}}_2(t) \cdot \mathbf{f}[x(t), y(t)] = \int_0^1 dt (2t^3 + t^2) = \frac{5}{6}. \quad (25)$$

- (d) Eine geeignete Parametrisierung eines Kreises mit Radius $R = 1$ um den Ursprung lautet

$$\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{e}_x + \sin(t)\mathbf{e}_y \quad (26)$$

mit $t \in [0, 2\pi]$. Wir finden damit $\dot{\mathbf{r}}(t) = -\sin(t)\mathbf{e}_x + \cos(t)\mathbf{e}_y$ und für das Wegintegral über $\mathbf{f}$

$$I_C = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{f} = \int_0^{2\pi} dt [-2\cos(t)\sin^3(t) + \cos^3(t)]. \quad (27)$$

Mit dem Symbol $\oint_C d\mathbf{r}$ bezeichnet man Wegintegrale entlang geschlossener Wege für die Anfangs- und Endpunkt identisch sind. Um das erste der beiden Integrale zu lösen, substituieren wir $y = \sin(t)$ und erhalten damit

$$\int_0^{2\pi} dt \cos(t) \sin^3(t) = \left. \frac{\sin^4(t)}{4} \right|_0^{2\pi} = 0. \quad (28)$$

Man kann auch zeigen, dass dieses Integral verschwindet indem man durch die Substitution $t' = t - \pi$ das Integrationsintervall zu $[-\pi, \pi]$ verschiebt. Der Integrand ist unverändert da $\cos(t' + \pi) = -\cos(t')$ und $\sin^3(t' + \pi) = -\sin^3(t')$. Das Integral verschwindet nun, da der Integrand $f(t') = \cos(t')\sin^3(t')$ ungerade ist, d.h. $f(-t') = -f(t')$.

Das zweite Integral kann man integrieren, indem man benutzt dass $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$ und erneut substituiert $y = \sin(t)$. Damit findet man

$$\int_0^{2\pi} dt \cos^3(t) = \sin(t) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{3} \sin^3(t) \Big|_0^{2\pi} = 0. \quad (29)$$

Insgesamt finden wir für das Wegintegral in Gl. (27) also

$$I_C = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{f} = 0. \quad (30)$$

Beachten Sie dass selbst für wegabhängige Vektorfelder wie hier das Vektorfeld $\mathbf{f}(x, y)$ das Integral entlang *bestimmter* geschlossener Wege verschwinden kann. Offensichtlich ist das nicht der Fall für alle geschlossenen Wege, zum Beispiel für einen Weg vom Ursprung zum Punkt $\mathbf{r}_1$ und zurück wobei der Hinweg entlang des Pfades i) und der Rückweg entlang des Pfades ii) erfolge.