Klassische Theoretische Physik I — WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian
M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Blatt 4
Abgabe 13.11.2018

Infobox:

Die **Fachschaft Physik** vertritt die Interessen, Anliegen, Meinungen der Studierenden nach aussen. Gleichzeitig dient sie als Anlaufstelle für Fragen und Probleme von Studierenden.

Um den Einstieg ins Studium zu erleichtern, organisiert das Mentorenprogamm der Fachschaft Physik eine Vortragsreihe **Rocket Science?!**, dessen erste Veranstaltung **Keep Calm, It's not Rocket Science** am Donnerstag 15.11.2018 um 17:30 im Lehmann Hörsaal stattfindet.

Weitere Infos finden Sie unter fachschaft.physik.kit.edu → Studienbeginn → Mentoren

1. Rechnen mit Kronecker und Levi-Civita Symbolen (50 Punkte)

In der Vorlesung wurden das Kronecker und das Levi-Civita Symbol definiert als

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad \text{und } \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j,k)=(1,2,3) \text{ oder zyklisch permutiert} \\ -1 & \text{falls } (i,j,k)=(2,1,3) \text{ oder zyklisch permutiert} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

Das Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt) $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ in drei Dimensionen kann man damit schreiben als $c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k$, wobei $\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \boldsymbol{e}_i$, etc. mit orthonormaler rechtshändiger Basis $\{\boldsymbol{e}_i\}$.

(a) Beweisen Sie die Relation $\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$.

(b) Wie verhält sich das Kreuzprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ unter einer (aktiven) Inversion der Vektoren $\boldsymbol{a} \to -\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \to -\boldsymbol{b}$?

(c) Zeigen Sie, daß $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

(d) Zeigen Sie, daß $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ das Volumen eines Parallelepipeds mit Seitenlängen $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ und $|\boldsymbol{c}|$ ist. Was passiert im Falle, daß zwei Vektoren parallel sind ?

(e) Die Determinante einer 3×3 reellen Matrix A ist definiert als

$$\det[A] = \det\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_{1,i} a_{2,j} a_{3,k} \,. \tag{2}$$

Benutzen Sie Aufgabenteil (d) um der Determinantenfunktion eine anschauliche Interpretation zu geben. Was ist die Determinante einer Matrix, in der zwei Zeilen oder Spalten Vielfache voneinander sind?

(f) Berechnen Sie $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$.

(g) Berechnen Sie $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})$ sowie $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2$.

2. Kugelkoordinaten (20 Punkte)

Die Transformation von kartesischen Koordinaten zu Kugelkoordinaten ist definiert durch

$$x = r \sin\theta \cos\phi \tag{3}$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi \tag{4}$$
$$z = r \cos\theta \,. \tag{5}$$

(a) Bestimmen Sie die Basisvektoren der Kugelkoordinaten $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ mit $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{e}_\theta = \partial\boldsymbol{e}_r/\partial\theta / |\partial\boldsymbol{e}_r/\partial\theta|$ und $\boldsymbol{e}_\phi = \partial\boldsymbol{e}_r/\partial\phi / |\partial\boldsymbol{e}_r/\partial\phi|$.

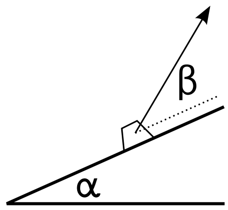
(b) Drücken Sie den Ortsvektor einer Trajektorie $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_x + y(t)\boldsymbol{e}_y + z(t)\boldsymbol{e}_z$ in der Kugelkoordinatenbasis aus.

(c) Drücken Sie den Geschwindigkeitsvektor einer Trajektorie $\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t)$ in der Kugelkoordinatenbasis aus.

(d) Drücken Sie den Beschleunigungsvektor einer Trajektorie $\boldsymbol{a}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ in der Kugelkoordinatenbasis aus.

3. Kräfte (15 Punkte)

Ein Objekt der Masse m liege auf einer reibungsfreien, schiefen Ebene mit Winkel α. Damit das Objekt in Ruhe bleibt wird daran gezogen und zwar entlang einer Linie mit Winkel β zur schiefen Ebene. Bestimmen Sie die Kraft als Funktion von α und β. Welche Werte sind für β zulässig?



4. Freier Fall (15 Punkte)

Ein Ball der Masse m werde aus hoher Höhe h, mit Geschwindigkeit v_0 in Richtung Erdboden geworfen, pralle dort elastisch (d.h. ohne Energieverlust) auf und fliege wieder nach oben. Bestimmen Sie die Kraft die augenblicklich **nach** dem Abprall auf den Ball wirkt wenn der Luftwiderstand (a) vernachlässigt und (b) nicht vernachlässigt wird. *Hinweis: Mit Luftwiderstand erreicht der Ball vor dem Aufprall eine konstante Geschwindigkeit* $v(t) = v_{\max}$.