

## Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian

Blatt 4

M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Lösungsvorschlag

## 1. Kronecker und Levi-Civita Symbole (10 + 5 + 5 + 10 + 5 + 10 + 5 = 50 Punkte)

- (a) Es muss gelten, dass  $j \neq k$  und  $l \neq m$ , da ansonsten der  $\epsilon$ -Tensor verschwindet. Die zu beweisende Relation erfüllt diese Bedingung, d.h. die rechte Seite verschwindet für  $j = k$  oder  $l = m$  oder  $j = k = l = m$ .

Für festes  $j \neq k$  und  $l \neq m$  verschwindet der  $\epsilon$ -Tensor nur dann nicht, falls  $i \neq j$  und  $i \neq k$ , bzw.  $i \neq l$  und  $i \neq m$ , gilt. Daher ist  $\epsilon_{ijk}$  und  $\epsilon_{ilm}$  nur einmal in der Summe von  $i = 1, 2, 3$  von Null verschieden. Damit das Produkt nicht verschwindet, muß dass der Fall für das gleiche  $i$  sein. Also müssen die Paare  $(j, k)$  und  $(l, m)$  aus den gleichen zwei Zahlen gezogen werden. Wenn das nicht der Fall ist, verschwindet die linke, aber offensichtlich auch die rechte Seite.

Falls die Paare  $(j, k)$  und  $(l, m)$  aus den gleichen zwei Zahlen gezogen werden gibt es zwei Möglichkeiten, erstens  $j = l$  und  $k = m$  oder  $j = m$  und  $k = l$ . Im ersten Fall finden wir  $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = +1$ , im zweiten Fall finden wir  $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ikj} = -(\epsilon_{ijk})^2 = -1$ . Dies gilt auch für die rechte Seite der Formel, womit diese bewiesen ist.

- (b) Es gilt dass  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-\mathbf{a}) \times (-\mathbf{b})$ . Das Kreuzprodukt also invariant unter einer aktiven Inversion. Dies ist die Eigenschaft eines sogenannten axialen Vektors. Ein Vektor, der sein Vorzeichen umdreht bei einer (aktiven) Inversion (so wie der Orts- oder Impulsvektor) wird als polarer Vektor bezeichnet.

(c)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{jki} a_i b_j c_k = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{kij} a_i b_j c_k = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (1)$$

wegen der zyklischen Eigenschaft des  $\epsilon$ -Tensors.

- (d) Die Fläche  $A$  des Parallelogramms, das von den Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  aufgespannt wird ist gegeben durch

$$A = \text{Grundseite} \times \text{Höhe} = bc \sin \phi, \quad (2)$$

wobei wir  $b$  als Grundseite und  $c \sin \phi$  also Höhe gewählt haben. Der Winkel  $\phi$  ist als der Winkel zwischen  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  definiert. Die Formel ist anschaulich und folgt direkt aus der Beobachtung  $A = (b + l)h - 2\frac{1}{2}lh$  wobei  $b = |\mathbf{b}|$ ,  $h = |\mathbf{c}| \sin \phi$  und  $l = |\mathbf{c}| \cos \phi$ . Wählen wir  $\mathbf{b}$  entlang der  $x$ -Achse und  $\mathbf{c}$  in der  $x$ - $y$ -Ebene, so erhalten wir aus

$$|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_x c_y \end{pmatrix} \right| = bc \sin \phi. \quad (3)$$

Das Volumen des Parallelepipeds ist gegeben durch  $V = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe}$ . Dies folgt durch Zerschneiden des Parallelepipeds analog zur Flächenformel für das Parallelogramm. Wir erhalten daher

$$V = Aa \cos \theta = a|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \cos \theta = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \quad (4)$$

wobei  $\theta$  der Winkel zwischen der Senkrechten auf der Ebene, die von  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  aufgespannt wird und  $\mathbf{a}$  ist. Wir wissen ja bereits, dass das Kreuzprodukt  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  senkrecht auf sowohl  $\mathbf{b}$  als auch  $\mathbf{c}$  steht. Dies folgt direkt aus der antisymmetrischen Eigenschaft des  $\epsilon$ -Tensors.

Falls zwei der Vektoren parallel sind, verschwindet offensichtlich das Volumen des Parallelepipeds. In der Formel folgt das direkt aus  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$  und der Formel, die Sie in Aufgabenteil (c) bewiesen haben.

(e) Es gilt

$$\det A = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3), \quad (5)$$

wobei  $\mathbf{a}_i$  die Zeilen der Matrix  $A$  darstellen. Die Determinante einer Matrix beschreibt also das Volumen des Parallelepipeds, das durch die Zeilenvektoren der Matrix  $A$  aufgespannt wird. Daher verschwindet die Determinante falls zwei Zeilen Vielfache voneinander sind, die Vektoren also (anti-)parallel sind.

Für die Spalten folgt das gleiche aus der Beobachtung, dass  $\det A^T = \det A$ , wobei  $A_{ij}^T = A_{ji}$  die transponierte Matrix darstellt. Dies kann man wie folgt beweisen

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} = \sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^3 a_{i\sigma(i)} \\ &\stackrel{j=\sigma^{-1}(i)}{=} \sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=j}^3 a_{\sigma^{-1}(j)j} \stackrel{\tau=\sigma^{-1}}{=} \sum_{\tau \in S_3} \text{sign}(\tau^{-1}) \prod_{i=j}^3 a_{\tau(j)j} \\ &= \sum_{\tau \in S_3} \text{sign}(\tau) \prod_{i=j}^3 a_{\tau(j)j} = \det A^T. \end{aligned} \quad (6)$$

Hier bezeichnet  $S_3$  die Gruppe der Permutationen des Tupels (123) und  $\text{sign}(\sigma)$  gibt an, ob die Permutation  $\sigma \in S_3$  eine zyklische Vertauschung entspricht, für die  $\text{sign}(\sigma) = 1$  gilt, oder einer anti-zyklischen Vertauschung, für die  $\text{sign}(\sigma) = -1$  gilt. Im vorletzten Schritt haben wir verwendet, daß  $\text{sign}(\tau^{-1}) = \text{sign}(\tau)^{-1} = \text{sign}(\tau)$ , da  $\text{sign}(\tau) = \pm 1$ .

(f) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \sum_{i,j,k,l,m=1}^3 \epsilon_i \epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{klm} b_l c_m = \sum_{i,j,k,l,m=1}^3 \epsilon_i \epsilon_{kij} a_j \epsilon_{klm} b_l c_m \\ &= \sum_{i,j,l,m=1}^3 \epsilon_i (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m = \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_i [a_j b_i c_j - a_j b_j c_i] \\ &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (7)$$

Dies wird auch als „bac-cab“-Regel bezeichnet.

(g) Eine direkte Berechnung ergibt

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \sum_{i,j,k,l,m=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k \epsilon_{ilm} c_l d_m = \sum_{j,k,l,m=1}^3 (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m \\ &= \sum_{j,k=1}^3 [a_j b_k c_j d_k - a_j b_k c_k d_j] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (8) \end{aligned}$$

Aus der vorherigen Rechnung folgt direkt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = a^2 b^2 (1 - \cos^2 \theta) = a^2 b^2 \sin^2 \theta. \quad (9)$$

## 2. Kugelkoordinaten

(5 + 5 + 5 + 5 = 20 Punkte)

(a) Die orthonormierten Basisvektoren der Kugelkoordinaten sind gegeben durch

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}| = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (10)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \partial \mathbf{e}_r / \partial \theta / |\partial \mathbf{e}_r / \partial \theta| = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \quad (11)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \partial \mathbf{e}_r / \partial \phi / |\partial \mathbf{e}_r / \partial \phi| = (-\sin \phi, \cos \phi, 0). \quad (12)$$

(b) Der Ortsvektor lautet  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z = r(t)\mathbf{e}_r$  mit  $r(t) = [x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2]^{1/2}$ .

(c) Der Geschwindigkeitsvektor in Kugelkoordinatenbasis lautet

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r \left( \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} \dot{\phi} \right) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r(\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \sin \theta \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi), \quad (13)$$

wobei wir benutzt haben, dass  $\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta$  und  $\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} = \sin \theta \mathbf{e}_\phi$ .

(d) Der Beschleunigungsvektor in Kugelkoordinatenbasis lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \sin \theta \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi) + \dot{r}(\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \sin \theta \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi) + r(\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \sin \theta \ddot{\phi}\mathbf{e}_\phi) \\ &\quad + r \left[ \dot{\theta} \left( \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \phi} \dot{\phi} \right) + \sin \theta \dot{\phi} \left( \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} \dot{\phi} \right) + \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

Verwenden wir nun dass  $\partial \mathbf{e}_\theta / \partial \theta = \mathbf{e}_r$ ,  $\partial \mathbf{e}_\theta / \partial \phi = \cos \theta \mathbf{e}_\phi$ ,  $\partial \mathbf{e}_\phi / \partial \phi = -\sin \theta \mathbf{e}_r - \cos \theta \mathbf{e}_\theta$  und fassen Terme zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{e}_r [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta] + \mathbf{e}_\theta [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta] \\ &\quad + \mathbf{e}_\phi [2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + r\ddot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta]. \quad (15) \end{aligned}$$

## 3. Kräfte

(15 Punkte)

Ohne externe Kraft, wird der Teil der Gravitationskraft ( $F_\downarrow = -mg \cos \alpha$ ) senkrecht zur Ebene durch die Normalkraft  $F_N$  der Ebene aufgehoben. Die Parallelkomponente ( $F_\leftarrow = -mg \sin \alpha$ ) wird dabei nicht kompensiert. Unter der Wirkung einer Zugkraft  $F_z$  entlang  $\beta$  wirkt nun zusätzlich eine Kraft  $F_\rightarrow = F_z \cos \beta$  entlang der Ebene und eine Kraft  $F_\uparrow = F_z \sin \beta$  senkrecht dazu. Aus der Bedingung  $F_\rightarrow + F_\leftarrow = 0$  finden wir sofort

$$F_z = mg \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \quad (16)$$

Die Kraft senkrecht zur Ebene sollte weiterhin verschwinden, dazu fordern wir  $F_N + F_{\downarrow} + F_{\uparrow} = 0$ . Da  $F_N \geq 0$  gilt muss immer auch  $F_{\downarrow} + F_{\uparrow} < 0$  gelten. Diese Einschränkung liefert die Bedingung  $\tan \beta < 1/\tan \alpha$ . Des weiteren kann  $\beta$  auch negative Werte annehmen bis  $-\pi/2$ . Zusammen gilt also

$$-\pi/2 < \beta \leq \arctan(1/\tan \alpha) \quad (17)$$

Bemerkung: Bei ganz negativen Winkeln  $\beta \approx -\pi/2$  wirkt eine extrem grosse Kraft auf die Ebene (welche sie kompensieren muss). Eine eventuelle Verformung oder Zerstörung der Ebene durch diese Kraft wurden natürlich vernachlässigt.

#### 4. Freier Fall

(15 Punkte)

- (a) Ohne Luftwiderstand gilt zu jedem Zeitpunkt vor und nach dem Aufprall  $F_{\text{gesamt}} = -mg$
- (b) Wird Luftwiderstand berücksichtigt so gilt, dass der Ball durch Reibungskräfte  $F_{\gamma}$  eine maximale Geschwindigkeit erreicht und zwar dann wenn  $F_{\gamma} - mg = 0$ , d.h. die Reibungskraft kompensiert die Erdanziehungskraft. Kurz nach dem Aufprall fliegt der Ball mit entgegengesetzter Geschwindigkeit hoch wie er zuvor runtergefallen ist, also  $v_{\uparrow} = -v_{\downarrow}$ . Damit dreht sich auch die Reibungskraft um,  $F_{\gamma} \rightarrow -F_{\gamma}$ , nicht aber die Erdanziehungskraft. Somit wirkt nun eine Kraft  $F_{\text{gesamt}} = -2mg$  auf den Ball.