Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian
M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Blatt 5
Abgabe 20.11.2018

---

1. Integrale (25 Punkte)

Die Hyperbelfunktionen 'sinus hyperbolicus' und 'cosinus hyperbolicus' sind definiert als

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) , \qquad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) .$$

(a) Zeigen Sie: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$ und $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion des $\sinh(x)$ lautet $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

(c) Berechnen Sie nun die unbestimmten Integrale $\int dx\, \cos^2(x)$ und $\int dx\, \cosh^2(x)$.
Hinweis: Hier eignet sich partielle Integration.

(d) Berechnen Sie mithilfe der Substitutionsregel das Integral $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{c^2+x^2}}$ mit $b > a$ und $c \in \mathbb{R}$.

2. Konservative Kräfte (35 Punkte)

Gegeben seien die beiden Kraftfelder

$$\boldsymbol{F}_+(\mathbf{r}) = D \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{F}_-(\mathbf{r}) = D \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

mit positiven Kraftkonstanten $D > 0$.

(a) Finden Sie heraus, ob diese Kräfte konservativ sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls das dazugehörige Potential.

(b) Skizzieren Sie die beiden Kraftfelder in der (x, y)-Ebene.

(c) Berechnen Sie mittels der Wegintegrale für beide Kraftfelder die Arbeit, die man verrichten muss um ein Teilchen vom Ursprung zum Punkt $\mathbf{A} = \frac{a}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ (mit $a > 0$) entlang der beiden in Abbildung 1 eingezeichneten Wegen (i) and (ii) zu bewegen. Interpretieren Sie die Resultate.

(d) Überprüfen Sie die Resultate aus Teil (c) für konservative Kräfte, indem Sie das Potential ausnutzen.

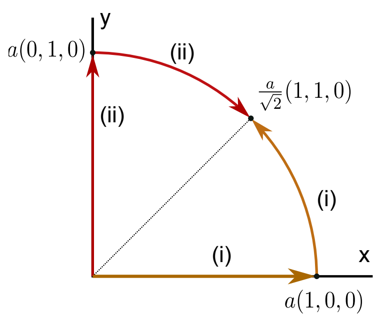

Abbildung 1:

3. Teilchen im Kraftfeld $\boldsymbol{F}_+$ (25 Punkte)

Gegeben sei ein Teilchen der Masse m, welches sich in dem Kraftfeld $\boldsymbol{F}_+(\boldsymbol{r})$ (siehe voherige Aufgabe) bewege.

(a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{1}{2\omega_0} \begin{pmatrix} -\sin(\omega_0 t) + \sinh(\omega_0 t) \\ \sin(\omega_0 t) + \sinh(\omega_0 t) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ die Bewegungsgleichungen löst. Wie lauten die Anfangsbedingungen $\boldsymbol{r}(0)$ und $\dot{\boldsymbol{r}}(0)$ für diese Lösung ?

(c) Skizzieren Sie die Bahnkurve (1) zusammen mit dem Kraftfeld $\boldsymbol{F}_+$ in der (x, y)- Ebene. Entwickeln Sie hierfür die Bahnkurve in den Grenzfällen $\omega_0 t \ll 1$ und $\omega_0 t \gg 1$, und verbinden Sie die Teilstücke geschickt.
Hinweis: Für Werte $x \ll 1$ *gilt* $\sin(x) \approx x - \frac{1}{6}x^3$ *und* $\sinh(x) \approx x + \frac{1}{6}x^3$.

(d) Es sei t_1 der Zeitpunkt zu dem das Teilchen zum ersten mal (nach $t = 0$) die erste Diagonale ($x = y$) erreicht. Bestimmen Sie t_1, sowie $\boldsymbol{r}(t_1)$ und $\dot{\boldsymbol{r}}(t_1)$. Berechnen Sie nun den Anstieg der kinetischen Energie $T(t_1) - T(t = 0)$, und vergleichen Sie mit der vom Kraftfeld verrichteten Arbeit (siehe 2(c)).

4. Teilchen im Potential (15 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie den Lagrange-Formalismus[1] kennengelernt. Dabei spielt die Lagrange-Funktion $L = T - U$ als Differenz von kinetischer Energie T und potentieller Energie U eine entscheidende Rolle. Wir wollen in dieser Aufgabe ein Teilchen der Masse m untersuchen, das sich in der (x, y)-Ebene unter Einfluss des Potentials

$$U(x, y, z) = -D\, x\, y$$

mit $D > 0$ bewegt.
Zeigen Sie, dass die Lagrange-Gleichungen $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}$ auf die gleichen Bewegungsgleichungen wie in Aufgabe 3(a) führen.

[1] Dieser wird im nächsten Semester noch ausführlicher behandelt