Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian
M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Blatt 6
Abgabe 27.11.2018

---

1. Taylor-Entwicklung (25 Punkte)

Die Taylor-Entwicklung ist ein sehr hilfreiches Werkzeug, um komplizierte Funktionen in eine einfache Polynomreihe zu nähern. Dabei lautet die Vorschrift

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=0} x^k \ ,$$

für eine Entwicklung um $x = 0$.

(a) Berechnen Sie für $f_1(x) = e^x$ und $f_2(x) = \ln(1 + x)$ die Taylorentwicklung bis einschliesslich der Ordnung $\mathcal{O}(x^2)$, und finden Sie damit die Reihendarstellung der beiden Funktionen.

(b) Berechnen Sie für die Funktion $A_n(x) = \frac{1}{(1+x)^n}$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ die Taylorentwicklung bis einschliesslich der Ordnung $\mathcal{O}(x^2)$. Finden Sie einen allgemeinen Ausdruck für $a_{n,k} = \frac{d^k A_n(x)}{dx^k}|_{x=0}$, und beweisen Sie diesen mittels vollständiger Induktion, d.h. $a_{n,k} \to a_{n,k+1}$. Geben Sie schliesslich die Reihendarstellung der Funktion $A_n(x)$ an.

2. Regentropfen bei Trockenheit (25 Punkte)

Wir möchten in dieser Aufgabe einen kugelförmigen Regentropfen (Radius R_0 und Masse m) betrachten, der im Schwerefeld der Erde zu Boden fällt, und dabei dem Luftwiderstand ausgesetzt ist. Die Dichte ρ des Wassers bleibe dabei konstant. Die Luftreibungskraft soll dabei sowohl proportional zu der Querschnittsfläche des Tropfens, als auch zu seiner Geschwindigkeit sein[1], das heisst

$$\boldsymbol{F}_L(t) = -\beta\, \pi R^2\, \dot{\boldsymbol{r}}(t) \tag{1}$$

mit $\beta > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen des Tropfens

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = -\tau^{-1}\dot{\boldsymbol{r}}(t) - g\hat{e}_z \ ,$$

lauten, wobei $\tau^{-1} = \frac{3\beta}{4R\rho}$.

(b) Die Anfangsbedingungen sollen sein $\boldsymbol{r}(0) = (0, 0, 0)$ und $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = (0, 0, 0)$. Zeigen Sie, dass damit direkt folgt $x(t) = y(t) = 0$.

(c) Machen Sie nun den Ansatz $\dot{z}(t) = \varphi(t)e^{-\tau^{-1}t}$, und bestimmen Sie $\varphi(t)$, sowie $\dot{z}(t)$. Betrachten Sie die Grenzfälle $\dot{z}(t \ll \tau)$ sowie $\dot{z}(t \gg \tau)$, und skizzieren Sie $\dot{z}(t)$.

(d) Finden Sie nun $z(t)$, und betrachten Sie erneut die Grenzfälle $z(t \ll \tau)$ und $z(t \gg \tau)$.

---

[1] Diese Annahme klingt zwar plausibel, ist physikalisch aber nicht ganz korrekt. Die Reibungskraft an einer Kugel ist entweder $\propto R\,v$ (laminar) oder $\propto R^2\,v^2$ (turbulent). Der Einfachheit halber verwenden wir unseren Ansatz dennoch.

3. Regentropfen bei dichtem Nebel (50 Punkte)

Genau wie in der vorigen Aufgabe möchten wir einen kugelförmigen Regentropfen betrachten, der im Schwerefeld der Erde zu Boden fällt, und dabei dem Luftwiderstand (Gleichung (1)) ausgesetzt ist. Dieses Mal jedoch soll die Masse des Tropfens während des Fallens durch Kondensation von Wasserdampf ständig grösser werden. Die Dichte ρ des Wassers bleibe dabei konstant.

(a) In einem sehr einfachen Modell nehmen wir dabei an, dass die Massenzunahme proportional zur Oberfläche des Tropfens ist, d.h.

$$\frac{dm}{dt} = \alpha\, 4\pi R^2 \, ,$$

mit $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass dies zu dem linearen Anstieg des Radius

$$R(t) = R_0 + \frac{\alpha}{\rho}\, t$$

führt, wobei $R_0 = R(0)$ der ursprüngliche Radius des Tropfens ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen in diesem Fall lauten

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = -\tau^{-1}\kappa(t)\dot{\boldsymbol{r}}(t) - g\hat{e}_z \, ,$$

mit $\tau^{-1} = \frac{3(\beta+4\alpha)}{4\rho R_0}$ und bestimmen Sie $\kappa(t)$. Führen Sie hier das dimensionslose Verhältnis $\gamma = \frac{4\alpha}{3(\beta+4\alpha)} > 0$ ein.[2]

(c) Die Anfangsbedingungen sollen wie zuvor sein $\boldsymbol{r}(0) = (0,0,0)$ und $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = (0,0,0)$. Vergewissern Sie sich, dass ebenfalls gilt $x(t) = y(t) = 0$.

(d) Machen Sie hier den Ansatz $\dot{z}(t) = \varphi(t)\, \exp\left(-\tau^{-1}\int_0^t dt'\,\kappa(t')\right)$. Bestimmen Sie daraus $\varphi(t)$, sowie $\dot{z}(t)$.

Von nun an wollen wir das Verhältnis zu $\gamma = \frac{1}{3}$ wählen[3].

(e) Betrachten Sie nun die Grenzfälle $\dot{z}(t \ll \tau)$ und $\dot{z}(t \gg \tau)$, und skizzieren Sie $\dot{z}(t)$ in das gleiche Schaubild von Aufgabe 2(c).

(f) Finden Sie nun $z(t)$, und betrachten Sie erneut die Grenzfälle $z(t \ll \tau)$ und $z(t \gg \tau)$. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus der vorigen Aufgabe.

[2] Verglichen mit der vorigen Version wurden in den Groessen (τ^{-1} und γ) $\beta \to (\beta + 4\alpha)$ korrekter Weise ersetzt. Fehlerfreie Loesungen mit den urspruenglichen Groessen werden dennoch voll bepunktet.

[3] Falls Sie so weit für allgemeines γ nicht gekommen sind, setzen Sie $\gamma = \frac{1}{3}$ schon früher ein, und nehmen Sie einen Punktabzug von 3 Punkten in Kauf. ;)