**Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019**

**Prof. Dr. J. Schmalian**
**M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa**

**Blatt 7**
**Abgabe 04.12.2018**

---

Die Dynamik einer Vielzahl von Naturphänomenen lässt sich auf die Bewegungsgleichung

$$\ddot{u}(t) = -\omega_0^2 u(t) \tag{1}$$

zurückführen. Dieser harmonischen Gleichung wird das Blatt gewidmet.

**1. Harmonischer Oszillator 1** (10 + 10 + 5 + 10 + 5 = 40 Punkte)

Wir betrachten ein massives Teilchen im Potential $V(x)$ in der Nähe einer Gleichgewichtslage $x_0$. Letztere ist dadurch charakterisiert, dass dort keine Kraft auf das Teilchen wirkt, d.h. $F(x_0) \equiv -V'(x_0) = 0$. Zu quartischer Ordnung lässt sich somit das Potential entwickeln zu

$$V(x) \approx V_0 + \frac{k}{2}(x-x_0)^2 + \frac{\alpha}{3}(x-x_0)^3 + \frac{\beta}{4}(x-x_0)^4. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass zu für eine Entwicklung zu quadratischer Ordnung die Bewegung durch die Gleichung (1) bestimmt ist. Ermitteln Sie die charakteristische Frequenz $\omega_0$ des Problems und diskutieren Sie einschränkende Bedingungen.

(b) Weiterhin unter der Annahme quadratischer Approximation, bestimmen Sie die maximale Auslenkung $u_m$ von der Gleichgewichtslage $x_0$, wenn das Teilchen eine gesamte Energie $\tilde{E} = V_0 + E \equiv V + T$ besitzt.

(c) Drücken Sie die Geschwindigkeit $v_0$ beim Durchlauf von $x_0$ mithilfe von $u_m$ aus.

(d) Damit die quadratische Entwicklung des Potentials die Bewegung weitgehend akkurat beschreibt, sollte bei der maximalen Auslenkung $u_m$, der kubische Term immer noch klein sein (der quartische wird hier vernachlässigt). Stellen Sie daraus eine Bedingung an $E$ und (äquivalent) an $v_0$. Wiederholen Sie die Abschätzung, für den Fall dass der kubische Term verschwindet und der quartische Term das harmonische Verhalten einschränkt.

(e) Wenden Sie die obige Betrachtung für ein Kind auf einer Schaukel der Länge $L$ an. Wie schnell darf das Kind schaukeln (gefragt ist $v_0$) damit die Bewegung noch gut durch die Gleichung (1) beschrieben ist? Nutzen Sie dazu die Koordinate $x = L\varphi$, wobei $\varphi$ den Winkel zwischen Schaukel und der Lotrichtung einschliesst und verwenden Sie die Entwicklung $\cos(\varphi) \approx 1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/24$ für kleine Winkel.

**2. Harmonischer Oszillator 2** (10 + 5 + 10 + 5 = 30 Punkte)

(a) Lösen Sie Gleichung (1) für die Anfangsbedingungen $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = v_0$ mit dem Ansatz

$$u(t) = u_c \cos(\omega t) + u_s \sin(\omega t). \tag{3}$$

(b) Bestimmen Sie den mittleren Wert vom Ort $\langle u \rangle$, von dessen Quadrat $\langle u^2 \rangle$, von der Geschwindigkeit $\langle \dot{u} \rangle$ und deren Quadrat $\langle \dot{u}^2 \rangle$, wobei der Mittelwert gegeben ist durch

$$\langle s \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt\ s(t). \tag{4}$$

Bei periodischen Funktionen genügt es über eine Periode $\tau = 2\pi/\omega$ zu integrieren.

(c)-(d) Wiederholen Sie Teilaufgaben (a) und (b), diesmal mit den Anfangsbedingungen $u(0) = u_m$, $\dot{u}(0) = 0$ und nutzen Sie den Ansatz

$$u(t) = u_+ e^{i\omega t} + u_- e^{-i\omega t}. \tag{5}$$

*Don't panic:* Nutzen Sie $i^2 = -1$ und $e^{2\pi i} = 1$. Des weiteren sind $u_\pm$ reell.

**3. Harmonischer Oszillator 3** (10 + 10 + 10 = 30 Punkte)

In dieser Aufgabe möchten die Schwingbewegung eines zweiatomigen Moleküls beschreiben, wobei $m_i$ die Masse und $r_i$ die Lage des $i$-ten Atoms ist. Der Einfachheit halber reduzieren wir die Betrachtung ausschliesslich auf den Freiheitsgrad entlang der Molekülachse.

(a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für die beiden Massenpunkte, wenn ein Potential $V(r_2 - r_1)$ die beiden Massen koppelt. Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen um für den Massenschwerpunkt $r = (m_1 r_1 + m_2 r_2)/(m_1 + m_2)$ und den Relativabstand $\ell = r_2 - r_1$ um und zeigen Sie, dass diese die Form

$$M\ddot{r} = 0 \qquad \text{und} \qquad \mu\ddot{\ell} = -V'(|\ell|) \tag{6}$$

annehmen. Drücken Sie die neuen Massen $M$ und $\mu$ durch $m_1$ und $m_2$ aus.

(b) Lösen Sie die beiden Bewegungsgleichungen unter der Annahme, dass die beiden Atome wie über ein Federpotential gekoppelt sind, d.h. $V(\ell) = k(\ell - \ell_0)^2/2$, mit Federkonstante $k$ und Ruheabstand[1] $\ell_0$.

(c) Bestimmen Sie die Schwingfrequenz für das Sauerstoff-Molekül $O_2$ [$k(O_2) = 1133\text{N/m}$] und das Stickstoff-Molekül $N_2$ [$k(N_2) = 2287\text{N/m}$]. Welcher Teil des elektromagnetischen Lichtspektrums ist nötig um diesen Frequenzbereich optisch anzuregen?

[1] Implizit wird hier angenommen, dass der Relativabstand $\ell$ nur wenig von $\ell_0$ abweicht damit die quadratische Näherung gültig ist. Insbesondere bedeutet das auch, dass $\ell > 0$.