

Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian

Blatt 7

M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Lösungsvorschlag

1. Harmonischer Oszillator 1

(10 + 10 + 5 + 10 + 5 = 40 Punkte)

- (a) Für ein Teilchen der Masse m , gilt $m\ddot{x} = -V'(x)$. In der Nähe der Gleichgewichtslage x_0 schreiben wir $x(t) = x_0 + u(t)$ und finden sofort.

$$m\ddot{u} = -ku \quad (1)$$

oder Gleichung (1) der Aufgabenstellung, mit $\omega_0^2 = k/m$. Offensichtlich muss $k > 0$ gelten damit die Frequenz ω_0 reell ist. *Eine negative 'Federkonstante' $k < 0$ würde zu einem exponentiellen Wachstum der Auslenkung u führen. Somit entscheidet das Vorzeichen der Potentialkrümmung darüber ob ein Ort x_0 stabil ist.*

- (b) Unter Verwendung der Energieerhaltung ist die maximale Auslenkung erreicht wenn die gesamte Energie in der potentiellen Energie steckt, also $\tilde{E} = V(x_0 + u_m)$ oder $E = ku_m^2/2$. Daraus folgt $u_m = \pm(2E/k)^{1/2}$. Die Auslenkung ist symmetrisch um die Gleichgewichtslage x_0 . *Bemerkung: Wiederum ist zu beobachten, dass für $k \rightarrow 0$ die Auslenkung divergiert.*
- (c) Wir wenden erneut die Energieerhaltung an und finden aus $ku_m^2/2 = mv_0^2/2$, dass gilt $v_0 = \pm\omega_0|u_m|$. Das Teilchen durchquert die Gleichgewichtslage x_0 mit maximaler positiver/negativer Geschwindigkeit.
- (d) Der Wunsch, dass der kubische Term vernachlässigt werden darf ist erfüllt wenn gilt: $|\alpha u_m^3|/3 \ll ku_m^2/2$, oder $|u_m| \ll |3k/2\alpha|$, oder $|v_0| \ll \omega_0|3k/2\alpha|$, oder $E \ll k(3k/2\alpha)^2/2$. Wenn $\alpha = 0$ gilt, so bricht die harmonische Näherung zusammen wenn $\beta u_m^4/4$ und $ku_m^2/2$ vergleichbar gross werden. Wir finden dann die Bedingungen $|u_m| \ll (2k/|\beta|)^{1/2}$, oder $v_0 \ll \omega_0(2k/|\beta|)^{1/2}$, oder $E \ll k^2/|\beta|$. *Bereits aus einer Dimensionsanalyse geht hervor, dass k/α und $(k/|\beta|)^{1/2}$ die einzigen neuen Längen im Problem sind.*
- (e) Für ein Kind auf der Schaukel gilt $V(x = L\varphi) = V_0 + mgL[1 - \cos(\varphi)]$ und eine Entwicklung um $x_0 = 0$ liefert $V(x = L\varphi) \approx V_0 + mgx^2/2L - mgx^4/24L^3$. Wir identifizieren also $k = mg/L$, $\alpha = 0$ und $\beta = mg/6L^3$. Damit folgt sofort, dass das Kind 'harmonisch' schaukelt solange die Auslenkung klein ist im Vergleich mit $12^{1/2}L$. Sehr aussagekräftig scheint das nicht im ersten Augenblick nicht. Jedoch ist zu erwarten, dass für Schwingungen bis $\pm 20^\circ$ der quartische Term mehr als zehnmal kleiner ist als der quadratische.

2. Harmonischer Oszillator 2

(10 + 5 + 10 + 5 = 30 Punkte)

- (a) Setzt man den Ansatz in die Bewegungsgleichung ein folgt sofort $\omega = \omega_0$. Die Werte für u_c und u_s ergeben sich dann aus den Anfangsbedingungen. Wir finden

$$u(0) = u_c = 0 \quad \text{und} \quad \dot{u}(0) = \omega_0 u_s = v_0 \quad (2)$$

und somit

$$u(t) = (v_0/\omega_0) \sin(\omega_0 t) \quad \text{und} \quad \dot{u}(t) = v_0 \cos(\omega_0 t). \quad (3)$$

- (b) Die Schwingung ist periodisch mit Periode $\tau = 2\pi/\omega$ und wir finden sofort, dass der mittlere Ort und der mittlere Impuls verschwinden, also $\langle u \rangle = 0$ und $\langle \dot{u} \rangle = 0$. Für die Mittelung der Quadrate verwenden wir

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2(\varphi) = 1/2 \quad (4)$$

eine Eigenschaft die sofort aus $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$ folgt. Wir finden somit $\langle u^2 \rangle = (v_0/\omega_0)^2/2$ und $\langle \dot{u}^2 \rangle = v_0^2/2$. Daraus lassen sich die Standardabweichungen

$$\Delta u \equiv \sqrt{\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2} = 2^{-1/2} v_0/\omega_0 \quad (5)$$

$$\Delta v \equiv \sqrt{\langle \dot{u}^2 \rangle - \langle \dot{u} \rangle^2} = 2^{-1/2} v_0 \quad (6)$$

berechnen. Es gilt $\Delta u \Delta v = v_0^2/2\omega_0$.

- (c) Auf ähnliche Weise wie in (a) finden wir $\omega = \omega_0$. Nun lauten die Anfangsbedingungen

$$u(0) = u_+ + u_- = u_m \quad \text{und} \quad \dot{u}(0) = i\omega_0(u_+ - u_-) = 0 \quad (7)$$

also $u_{\pm} = u_m/2$. Somit lautet die Lösung

$$u(t) = u_m \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \quad \text{und} \quad \dot{u}(t) = -\omega_0 u_m \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} \quad (8)$$

Wobei die beiden Brüche genau den Darstellungen von $\cos(\omega_0 t)$ und $\sin(\omega_0 t)$ entsprechen.

- (c) Wir fahren fort indem wir die Eigenschaften $(e^{i\omega_0 t} \pm e^{-i\omega_0 t})^2 = e^{i2\omega_0 t} + e^{-i2\omega_0 t} \pm 2$ und

$$\int_0^{2\pi} dy e^{iny} = 0 \quad (9)$$

für jedes ganzzahlige nicht-verschwindende n . Damit finden wir $\langle u \rangle = 0$, $\langle u^2 \rangle = u_m^2/2$, $\langle \dot{u} \rangle = 0$ und $\langle \dot{u}^2 \rangle = \omega_0^2 u_m^2/2$. Hier finden wir $\Delta u \Delta v = \omega_0 u_m^2/2$. Die Lösungen aus Teilaufgaben (a) und (c) sind um $t = \pi/2\omega_0$ verschoben wenn wir $u_m = v_0/\omega_0$ identifizieren.

3. Harmonischer Oszillator 3

(10 + 10 + 10 = 30 Punkte)

(a) Es gilt

$$m_1 \ddot{r}_1 = V'(r_2 - r_1) \quad (10)$$

$$m_2 \ddot{r}_2 = -V'(r_2 - r_1) \quad (11)$$

Womit wir sofort finden, dass

$$M \ddot{r} = 0 \quad (12)$$

$$m_1 m_2 (\ddot{r}_2 - \ddot{r}_1) = -M V'(r_2 - r_1) \quad (13)$$

mit $M = m_1 + m_2$ der Gesamtmasse des Zweikörpersystems. Die zweite Gleichung bringt man nun rasch auf die Form $\mu \ell = -V'(\ell)$, mit $\mu = m_1 m_2 / M$ die reduzierte Masse der Relativkoordinate.

(b) Die erste Gleichung beschreibe eine gleichmässige Bewegung $r(t) = r(0) + \dot{r}(0)t$. Für die Relativkoordinate finden (vgl. Aufgabe 2) wir mit dem harmonischen Ansatz

$$\ell(t) = \ell_0 + \ell(0) \cos(\omega_0 t) + [\dot{\ell}(0)/\omega_0] \sin(\omega_0 t) \quad (14)$$

mit $\omega_0^2 = k/\mu$ (vgl. mit Aufgabe 1).

(c) Für ein Molekül aus zwei gleichen Atomen der Masse m gilt $M = 2m$ und $\mu = m/2$. Wir finden $\omega_0(\text{O}_2) = \sqrt{1133[\text{N/m}]/8[\text{u}]} \approx 2.92 \times 10^{14} \text{Hz} \approx 300 \text{THz}$ wobei $1\text{u} \approx 1.66 \times 10^{-27} \text{kg}$ die atomare Masseneinheit, $1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$ die Einheit für Frequenzen und $1\text{THz} = 10^{12} \text{Hz}$. Ebenso finden wir $\omega_0(\text{N}_2) \approx 444 \text{THz}$. Die Kreisfrequenz ω lässt sich mittels der Beziehung $\omega = 2\pi\nu$ in eine Frequenz ν umrechnen, wobei uns ν nun eine typische Energieskala für die Anregungsenergie liefert. Im elektromagnetischen Spektrum befinden sich beide Frequenzen im Infrarot-Bereich. Beide Moden können mittels Raman-Spektroskopie untersucht werden (siehe [wikipedia.org/wiki/Raman_spektroskopie](https://de.wikipedia.org/wiki/Raman_spektroskopie)).