Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian
M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Blatt 8
Abgabe 11.12.2018

Infobox:

Die zweite Veranstaltung der Vortragsreihe **Keep Calm, It's not Rocket Science** findet am Dienstag 04.12.2018 um 17:30 im Lehmann Hörsaal statt. Dabei berichtet der Gastdozent Prof. Auerbach über den Maxwell'schen Dämon.

Weitere Infos finden Sie unter fachschaft.physik.kit.edu

1. Massive Dynamik im harmonischen Potential $(10+5+10+5+10+10 = 50$ Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m in einem zweidimensionalen Potential

$$V(x,y) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}y^2 + c\,xy, \tag{1}$$

und welches einer Kraft $\boldsymbol{F}_d(t) = (F_0, 0)e^{i\omega t}$ ausgesetzt ist[1].

(a) Damit das Potentials V am Ort $\boldsymbol{r} \equiv (x,y) = (0,0)$ ein Minimum besitzt, müssen die Eigenwerte der Hesse-Matrix

$$H \equiv \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial x}\right|_{\boldsymbol{r}=0} & \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right|_{\boldsymbol{r}=0} \\ \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}\right|_{\boldsymbol{r}=0} & \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial y}\right|_{\boldsymbol{r}=0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \tag{2}$$

positiv sein [im eindimensionalen Fall $V_{\text{1D}}(x) = ax^2/2$ garantiert $a > 0$ ein Minimum im Ursprung]. Diese Bedingung ist äquivalent zur Forderung dass die Determinante $\det H \equiv ab - c^2$ und die Spur $\operatorname{tr} H \equiv a + b$ der Hesse Matrix positiv sind. Finden Sie die Bedingungen für a, b, und c.

(b) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für die beiden Koordinaten x und y auf.

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den Fall dass $c = 0$ gilt.

(d) Als Funktion der Treiberfrequenz ω weist die Lösung verschiedene Verhalten auf. Bestimmen Sie die charakteristische Frequenz ω_0 mit welcher die Treiberfrequenz ω verglichen werden muss und diskutieren Sie die Grenzwerte $\omega \ll \omega_0$ und $\omega \gg \omega_0$.

(e) Für eine geeignete Koordinatentransformation $\tilde{\boldsymbol{r}} = R(\varphi)\boldsymbol{r}$ mit der Rotationsmatrix

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

nimmt das Potential in Gleichung (1) die Form $\tilde{V}(\tilde{x},\tilde{y}) = (\tilde{a}/2)\tilde{x}^2 + (\tilde{b}/2)\tilde{y}^2$ an, wobei $\tilde{\boldsymbol{r}} = (\tilde{x},\tilde{y})$. Bestimmen Sie φ, $\tilde{a}$, und $\tilde{b}$. Dazu dürften die trigonometrischen Eigenschaften $\sin(z)\cos(z) = \sin(2z)/2$, $\cos^2(z) - \sin^2(z) = \cos(2z)$, und $\cos[\arcsin(z)] = (1-z^2)^{-1/2}$ nützlich sein.

(f) Drücken Sie die Kraft in den neuen Koordinaten aus und bestimmen Sie mithilfe von Teilaufgabe (c) die allgemeine Lösung. Welche Resonanzen treten im System auf?

2. Überdämpfte Dynamik im harmonischen Potential $(10+10+10 = 30$ Punkte)

Wir erweitern das Problem aus Aufgabe 1 um eine Dämpfungskraft $\boldsymbol{F}_\eta = -\eta\dot{\boldsymbol{r}}$ welche die Bewegung entschleunigt. Insbesondere interessieren wir uns für den Kriechfall, wenn der Dämpfungsgrad gross ist. Dies ist dann der Fall wenn die Masse des Teilches vernachlässigt werden kann.

[1] Da alle physikalischen Grössen reell sein müssen ist am Ende immer der Realteil zu betrachten, d.h., $e^{i\omega t} \rightarrow \Re[e^{i\omega t}] = \cos(\omega t)$. Um die Notation nicht zu erschweren wird der Realteil hier weggelassen.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für $m = 0$ auf. Da Beiträge der Anfangsbedingungen zur Gesamtlösung durch die Dämpfung exponentiell abfallen (siehe Vorlesungsskript), ist die Dynamik bei grossen Zeiten massgeblich durch den Treiber bestimmt. Der Ansatz $[x(t), y(t)] = [x_0, y_0]e^{i\omega t}$ soll deshalb die Bewegung (lange) nach dem Einschwingvorgang beschreiben. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen zu den algebraischen Gleichungen

$$i\eta\omega x_0 = -ax_0 - cy_0 + F_0 \tag{4}$$
$$i\eta\omega y_0 = -cx_0 - by_0 \tag{5}$$

für x_0 und y_0 führen.

(b) Lösen Sie die Gleichungen (4) und (5) und betrachten Sie dann die Grenzfälle $\eta\omega \ll a, b, c$ und $\eta\omega \gg a, b, c$. Alternativ können die Gleichungen in den Grenzfälle betrachtet/gelöst werden. Wie interpretieren Sie reelle/imaginäre Werte für x_0 und y_0?

(c) Mittels der Auslenkungen x_0 und y_0 des Teilchens in den beiden Frequenzbereichen lassen sich die Krümmungen a, b, und c ermitteln. Tun Sie dies unter der Annahme dass nur F_0 und ω bekannt sind.

($\star$) Ein Flusswirbel (Vortex) in einem Supraleitenden Film folgt genau dieser überdämpften Dynamik. Um die Potentialeigenschaften eines einzelnen Flusswirbels zu studieren, wurde in einer kürzlich veröffentlichten Arbeit [L. Embon, *et al.*, *'Probing dynamics and pinning of single vortices in superconductors at nanometer scales'*, Scientific Reports **5**, 7598 (2015)] die oben diskutierte oszillierende Kraft auf den Flussschlauch angewandt und die Auslenkungen x_0 und y_0 gemessen. Lesen Sie den Artikel und finden Sie heraus ob das Experiment kleine oder grosse Frequenzen anlegt. Stellen Sie eine Vermutung auf wieso dieser Frequenzbereich gewählt wurde.

3. Über unsere Einheiten (10 + 10 = 20 Punkte)

Am 16. November 2018, wurden anlässlich der *26. Conférence Générale des Poids et Mesures* mehrere Grundeinheiten, darunter Ampere und Kilogramm, durch Festlegung von Naturkonstanten neu definiert. [www.bipm.org/]

Ab dem 20. Mai 2019 wird das International Einheitensystem (SI) definiert durch

- Avogadro Konstante $N_A = 6.022\,140\,76 \times 10^{23}$ [mol^{-1}]
- Boltzmann Konstante $k_\text{B} = 1.380\,649 \times 10^{-23}$ [JK^{-1}]
- Plancksche Konstante $h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$ [Js]
- Einheitsladung $e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$ [C]
- Lichtgeschwindigkeit $c = 299\,792\,458$ [ms^{-1}]
- Frequenz der Strahlung erzeugt durch den Übergangs zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveas im Grundzustand des Caesium-Isotops ^{133}Cs $\Delta\nu_\text{Cs} = 9\,192\,631\,770$ [Hz]
- Photometrisches Strahlungsäquivalent einer monochromatischen Strahlung der Frequenz 540×10^{12} [Hz]: $K_\text{CD} = 683$ [lmW^{-1}].

(a) Drücken Sie die Basiseinheiten Meter [m], Kilogramm [kg], Sekunde [s], Ampere [A], Kelvin [K], Stoffmenge [mol], und Lichtstärke [cd] in den oben definierten Grössen aus.

(b) Jede physikalische Einheit Q lässt sich dann schreiben als $Q = \text{m}^\alpha\text{kg}^\beta\text{s}^\gamma\text{A}^\delta\text{K}^\varepsilon\text{mol}^\zeta\text{cd}^\eta$. Stellen Sie die Werte α, β, γ, δ, ε, ζ, η für die folgenden Einheiten tabellarisch dar: Hertz (Frequenz), Newton (Kraft), Joule (Energie, Arbeit), Volt (elektrische Spannung), Coulomb (elektrische Ladung), Ohm (elektrischer Widerstand), Celsius (Temperatur). Wenn Ihnen weitere Einheiten (Grössen) begegnen, dürfen Sie diese gerne auch anfügen.