Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian
M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Blatt 8
Lösungsvorschlag

---

1. Massive Dynamik im harmonischen Potential $(10+5+10+5+10+10 = 50$ Punkte)

(a) Aus $\det H = ab - c^2 > 0$ muss zwingend gelten, dass a und b dasselbe Vorzeichen besitzen. Zusammen mit der Bedingung $\operatorname{tr} H = a+b > 0$ folgt dann, dass $a > 0$ und $b > 0$. Das Vorzeichen von c spielt keine Rolle, jedoch muss $c < \sqrt{ab}$ sein. Unter diesen Voraussetzungen finden folgende Betrachtungen statt.

(b) Das Potential erzeugt eine Rücktreibende Kraft der Form

$$\boldsymbol{F}(x,y) = -\nabla V(x,y) = -\begin{pmatrix} ax+cy \\ by+cx \end{pmatrix}, \tag{1}$$

und somit finden wir aus $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{F}_d(t)$

$$\begin{pmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} ax+cy \\ by+cx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_0 e^{i\omega t} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(c) Für $c = 0$ entkoppeln beide Koordinaten und die Bewegungsgleichung lässt sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \omega_x^2 x + F_0 e^{i\omega t} \\ \omega_y^2 y \end{pmatrix} \tag{3}$$

mit $\omega_x^2 = a/m$ und $\omega_y^2 = b/m$. Wir finden eine getriebene harmonische Schwingung entlang x und eine freie harmonische Schwingung entlang y. Entlang beider Richtungen lässt sich die Lösung schreiben[1] als

$$x(t) = x_0 e^{i\omega_x t} + F_0 e^{i\omega t}/(\omega_x^2 - \omega^2) \tag{4}$$
$$y(t) = y_0 e^{i\omega_y t} \tag{5}$$

(d) Die Treiberfrequenz ω wird natürlich mit $\omega_0 \equiv \omega_x$ verglichen. Für $\omega/\omega_x \ll 1$ erhalten wir

$$x(t) = x_0 e^{i\omega_x t} + (F_0/\omega_x^2) e^{i\omega t} \tag{6}$$
$$y(t) = y_0 e^{i\omega_y t}. \tag{7}$$

Auf der Zeitskala einer Potential-Oszillation [erster Term in Gl. (6)] kann die getriebene Oszillation [zweiter Term in Gl. (6)] als konstant betrachtet werden. Für hohe Treiberfrequenzen $\omega/\omega_x \gg 1$ gilt

$$x(t) = x_0 e^{i\omega_x t} - (F_0/\omega^2) e^{i\omega t} \tag{8}$$
$$y(t) = y_0 e^{i\omega_y t}. \tag{9}$$

Hier ist zwar der erste Term in Gl. (8) quasi-statisch im Vergleich zum zweiten. Allerdings fällt die Amplitude der getriebenen Schwingung wie ω^{-2} ab. Somit dominiert bei hohen Treiberfrequenzen die Potentialschwingung.

[1] Hier ist nun $x_0 = x_0^r + i x_0^i$ eine komplexe Zahl. Damit wird die Lösung $x_0 e^{i\omega_x t} \to \mathrm{Re}\,[x_0 e^{i\omega_x t}] = x_0^r \cos(\omega_x t) - x_0^i \sin(\omega_x t)$. Ebenso verhält es sich bei y_0.

(e) Die Bestimmungsggleichungen für φ, $\tilde{a}$, und $\tilde{b}$ gehen aus einem Vergleich der Koeffizienten von $\tilde{V}[\tilde{x}(x,y),\tilde{y}(x,y)] = V(x,y)$ hervor:

$$\frac{1}{2}[\tilde{a}\cos(\varphi)^2 + \tilde{b}\sin(\varphi)^2] = \frac{a}{2} \quad \text{Terme proportional zu } x^2 \tag{10}$$
$$\frac{1}{2}[\tilde{a}\sin(\varphi)^2 + \tilde{b}\cos(\varphi)^2] = \frac{b}{2} \quad \text{Terme proportional zu } y^2 \tag{11}$$
$$(\tilde{a}-\tilde{b})\sin(\varphi)\cos(\varphi) = c \quad \text{Terme proportional zu } xy \tag{12}$$

Aus der letzten Gleichung folgt sofort $\varphi = (1/2)\arcsin[2c/(\tilde{a}-\tilde{b})]$. Addiert und subtrahiert man die zwei ersten Gleichungen erhält man ausserdem

$$\tilde{a}+\tilde{b} = a+b \tag{13}$$
$$(\tilde{a}-\tilde{b})[\cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2] = a-b \tag{14}$$

Hier deutet die erste Gleichung an, dass die Spur der Hesse-Matrix unter Rotationen erhalten bleibt. Mit dem Ausdruck für φ, lässt sich die zweite Gleichung umschreiben zu $(\tilde{a}-\tilde{b}) = \sqrt{(a-b)^2+4c^2}$. Abschliessend gilt also

$$\tilde{a} = \frac{1}{2}[(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 - 4(ab-c^2)}] \tag{15}$$
$$\tilde{b} = \frac{1}{2}[(a+b) - \sqrt{(a+b)^2 - 4(ab-c^2)}] \tag{16}$$
$$\varphi = \frac{1}{2}\arcsin\left[\frac{2c}{\sqrt{(a+b)^2-4(ab-c^2)}}\right] \tag{17}$$

Im letzten Schritt wurde die Lösung ausgedrückt in der Spur $(a+b)$ und der Determinante $(ab-c^2)$ der Hesse Matrix. $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$ sind genau die Eigenwerte der Hesse Matrix.

(f) Da die Kraft nicht mitrotiert, gilt $\tilde{\boldsymbol{F}}_d = R(-\varphi)\boldsymbol{F}_d = F_0[\cos(\varphi), -\sin(\varphi)]e^{i\omega t}$. Die allgemeine Lösung ist also die von zwei entkoppelten getriebenen harmonischen Schwingungen

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{i\tilde{\omega}_x t} + F_0\cos(\varphi)e^{i\omega t}/(\tilde{\omega}_x^2 - \omega^2) \tag{18}$$
$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 e^{i\tilde{\omega}_y t} - F_0\sin(\varphi)e^{i\omega t}/(\tilde{\omega}_y^2 - \omega^2) \tag{19}$$

mit $\tilde{\omega}_x^2 = \tilde{a}/m$ und $\tilde{\omega}_y^2 = \tilde{b}/m$. Die Frequenzen $\tilde{\omega}_x$ und $\tilde{\omega}_y$ definieren dann auch die zwei Resonanzen.

2. Überdämpfte Dynamik im harmonischen Potential $(10+10+10=30$ Punkte$)$

(a) Auf der linken Seite von Gleichung (2) ersetzt $\gamma(\dot{x},\dot{y})$ den Term $m(\ddot{x},\ddot{y})$. Einmaliges zeitliches Ableiten des Ansatzes liefert $i\omega(x_0,y_0)e^{i\omega t}$ womit alle Terme der Bewegungsgleichung dieselbe zeitliche Abhängigkeit $e^{i\omega t}$ aufweisen. Kürzt man diese weg bleiben nur noch algebraische Gleichungen übrig

$$i\eta\omega x_0 = -ax_0 - cy_0 + F_0 \tag{20}$$
$$i\eta\omega y_0 = -cx_0 - by_0. \tag{21}$$

(b) Die Lösungen zu obigen Gleichungen lauten

$$x_0 = F_0\frac{b+i\eta\omega}{(ab-c^2)+i\eta\omega(a+b)-(\eta\omega)^2} \tag{22}$$
$$y_0 = F_0\frac{-c}{(ab-c^2)+i\eta\omega(a+b)-(\eta\omega)^2}. \tag{23}$$

Bei kleinen Frequenzen gilt

$$x_{0,0} = F_0 \frac{b}{ab - c^2} \qquad y_{0,0} = F_0 \frac{-c}{ab - c^2}. \tag{24}$$

Beachte dass die Bewegung nicht entlang der Kraft ist! Bei grossen Frequenzen gilt

$$x_{0,\omega} = F_0 \frac{-i}{\eta\omega} \qquad y_{0,\omega} = F_0 \frac{c}{(\eta\omega)^2}. \tag{25}$$

Für reelle x_0, y_0 ist die Auslenkung 'in Phase' mit der treibenden Kraft. Für rein imaginäre x_0, y_0 ist die grösste Auslenkung um ein Viertel einer Periode verschoben. Es ist zu beachten, dass bei sehr hohen Frequenzen der vernachlässigte Massenterm $\propto m\omega^2$ gegenüber dem Dämpfungsterm $\propto \eta\omega$ dominant wird. Für eine genügend kleine Masse m ist obige Lösung jedoch zulässig.

(c) Wir finden sukzessive

$$\eta = F_0 \frac{-i}{\omega\ x_{0,\omega}} \qquad c = -F_0 \frac{y_{0,\omega}}{x_{0,\omega}^2} \qquad b = F_0 \frac{y_{0,\omega}}{x_{0,\omega}^2} \frac{x_{0,0}}{y_{0,0}} \qquad a = F_0 \frac{x_{0,\omega}^2 + y_{0,0} y_{0,\omega}}{x_{0,0} x_{0,\omega}^2} \tag{26}$$

($\star$) Wegen dem Abfall der Schwingamplitude (mindestens wie ω^{-1}) für grosse Frequenzen und der begrenzten Aufllösung im Experiment kann nur die lineare Antwort bei kleinen Frequenzen geprobt werden. Damit lässt sich die Potentialkrümmung entlang der Schwingrichtung $\phi = \arctan(y_0/x_0) = -\arctan(c/b)$ bestimmen. Mit einem kleveren Trick – es werden sukzessive grössere Kräfte $F_{dc} = nF_{ac}$ angelegt – kann man die Trajektorie des Vortex in der Potentiallandschaft verfolgen und das Potential entlang dieser Trajektorie messen. Anharmonische Effekte führen schliesslich dazu, dass der Vortex kein Potentialminimum mehr findet und aus dem System verschwindet.

3. Über unsere Einheiten (10 + 10 = 20 Punkte)

(a)

$$1\text{m} = 30.663\,3 \quad c/(\Delta\nu_{\text{Cs}}) \tag{27}$$
$$1\text{kg} = 1.475\,52 \times 10^{40}\ h(\Delta\nu_{\text{Cs}})/c^2 \tag{28}$$
$$1\text{s} = 9.192\,63 \times 10^{9}/(\Delta\nu_{\text{Cs}}) \tag{29}$$
$$1\text{A} = 6.789\,69 \times 10^{8}\ e(\Delta\nu_{\text{Cs}}) \tag{30}$$
$$1\text{K} = 2.266\,67 \quad h(\Delta\nu_{\text{Cs}})/k_{\text{B}} \tag{31}$$
$$1\text{mol} = 6.022\,14 \times 10^{23}/N_A \tag{32}$$
$$1\text{cd} = 2.614\,83 \times 10^{10}\ hK_{\text{CD}}(\Delta\nu_{\text{Cs}})^2/\text{sr} \tag{33}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt dass lumen (lm) und candela (cd = lm/sr) über das dimensionslose Raumwinkelmass Steradiant (sr) verbunden sind.

(b) Tabelle 1 stellt gebräuchliche Einheiten in Basis-Einheiten dar.

Einheit	α (m)	β (kg)	γ (s)	δ (A)	ε (K)	ζ (mol)	η (cd)
1	0	0	0	0	0	0	0
Hz	0	0	-1	0	0	0	0
N	1	1	-2	0	0	0	0
J	2	1	-2	0	0	0	0
V	2	1	-3	-1	0	0	0
C	0	0	1	1	0	0	0
Ω	2	1	-3	-2	0	0	0
°C	0	0	0	0	1	0	0

Tabelle 1: Darstellung von Einheiten Q in den Basis-Einheiten via $\mathrm{m}^\alpha \mathrm{kg}^\beta \mathrm{s}^\gamma \mathrm{A}^\delta \mathrm{K}^\varepsilon \mathrm{mol}^\zeta \mathrm{cd}^\eta$.