Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian
M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Blatt 9
Abgabe 18.12.2018

Infobox:

Dieses Übungsblatt ist im Umfang eines halben Blattes gehalten, damit sich die Student(inn)en auf die Übungsklausur am **Mittwoch**, **den 19.12.18**, von 15:45 Uhr - 17:15 Uhr vorbereiten können. Zur Klausur werden keine Hilfsmittel erlaubt sein. Schreibpapier wird gestellt.
Die Hörsaalaufteilung sieht wie folgt aus:

- Studenten, deren Nachnamen mit den Buchstaben **A – M** beginnen, finden sich im **Fritz – Haller – Hörsaal** ein.
- Studenten, deren Nachnamen mit den Buchstaben **N – Z** beginnen, finden sich im **Gaede – Hörsaal** ein.

Bitte seien Sie spätestens um 15:40 Uhr im jeweiligen Hörsaal.

1. Dirac δ-Distribution (25 Punkte)

Die Dirac δ-Distribution ist über ihre Eigenschaft unter einem Integral definiert:

$$\int_a^b dx\, f(x)\, \delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{, für } a < x_0 < b \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \quad . \tag{1}$$

Etwas anschaulicher lässt sich das interpretieren als eine Funktion[1] mit

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{, für } x = 0 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \quad . \tag{2}$$

Mittels der Definition (1) sollen die folgende Eigenschaften bewiesen werden.

(a)

$$\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x) \qquad \text{, wobei gelte } a < 0 < b.$$

(b)

$$\int_a^b dx\, f(x)\, \delta'(x) = -f'(0) \qquad \text{, wobei gelte } a < 0 < b.$$

(c)

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|} \ , \tag{3}$$

wobei $g(x)$ eine differenzierbare Funktion ist, die lediglich einfache Nullstellen x_n besitzt, und die Summe über alle Nullstellen x_n geht.
Tipp : Es ist nützlich das Intervall in die Bereiche um die Nullstellen herum zu unterteilen, und zu linearisieren.

Die δ-Funktion kann als Grenzwert einer Funktionenfolge dargestellt werden. Eine mögliche solche Darstellung ist die Lorentzfunktionenfolge, gegeben als

$$\delta_L(x) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} \ . \tag{4}$$

---

[1] Formal mathematisch handelt es sich nicht um eine Funktion, sondern um eine sogenannte Disbtribution, d.h. ein lineares mathematisches Objekt, das einer Funktion (hier: $f(x)$) eine Zahl (hier: $f(x_0)$) zuordnet.

(d) Zeigen Sie, dass die Definition (4) die Eigenschaft (1) erfüllt.
Tipp : Eigentlich müsste man $\lim_{\alpha\to 0}\int dx\ \ldots$ berechnen, aber Limes und Integration dürfen hier vertauscht werden. Das Integral $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$ könnte nützlich sein.

(e) Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} = \delta(x)\ , \tag{5}$$

indem Sie mittels Konvergenz erzeugendem Faktor $\alpha > 0$ den Ausdruck $\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx-\alpha|k|}$ betrachten.

2. Harmonischer Oszillator mit beliebiger Anregung (25 Punkte)

Für einen gedämpften ($\gamma > 0$) harmonischen Oszillator mit einer externen Antriebskraft, beschrieben durch

$$\ddot{x} + \gamma\,\dot{x} + \omega_0^2\, x = f(t)\,, \tag{6}$$

kann die allgemeine Lösung $x(t)$ geschrieben werden als

$$x(t) = c_1\, x_1(t) + c_2\, x_2(t) + \bar{x}(t)\ .$$

Hier beschreiben $x_{1,2}(t)$ die Lösungen der homogenen Gleichung (d.h. bei $f(t) = 0$), und $\bar{x}(t)$ die partikuläre Lösung, d.h. eine bestimmte Lösung der Gleichung (6). In der Vorlesung haben Sie gesehen wie die partikuläre Lösung $\bar{x}(t)$ mit Hilfe der Green'schen Funktion

$$G(t) = \theta(t)\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega}\ ,$$

(mit $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$) für beliebige Antriebskraft ausgedrückt werden kann als

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, G(t-t')f(t')\ . \tag{7}$$

Da die homogenen Lösungen mit $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ (oder schneller) exponentiell abfallen, ist das Langzeitverhalten alleinig durch $\bar{x}(t)$ beschrieben, d.h. $x(t \gg \gamma) \approx \bar{x}(t)$. Im Folgenden sollen verschiedene Antriebskräfte untersucht werden.

(a) Betrachten Sie eine harmonische Anregung der Form $f(t) = f_0\, e^{i\omega t}$ und zeigen Sie, dass die aus (7) resultierende partikuläre Lösung mit dem Resultat aus der Vorlesung übereinstimmt, d.h. $\bar{x}(t) = f_0\, A(\omega)\, e^{i\omega t}$ mit $A(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)^{-1}$.

(b) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung für die harmonische Pulsanregung $f(t) = f_0\,\delta(\sin(\omega t))$. Zeigen Sie anschließend, dass die Lösung periodisch ist, d.h. $\bar{x}(t+T) = \bar{x}(t)$ mit der Periodendauer T.