

Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian

Blatt 9

M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Lösungsvorschlag

1. Dirac δ -Funktion

(3 + 3 + 6 + 7 + 6 = 25 Punkte)

Die Dirac δ -Funktion ist nur über ihre Eigenschaft unter einem Integral definiert:

$$\int_a^b dx f(x) \delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & , \text{für } a < x_0 < b \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} . \quad (1)$$

(a) Hier schreiben wir

$$\int_a^b dx f(x) \delta(cx) = \int_{ac}^{bc} \frac{dx}{c} f\left(\frac{x}{c}\right) \delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{c} f(0) & , \text{für } c > 0 \\ \frac{1}{|c|} f(0) & , \text{für } c < 0 \end{cases} , \quad (2)$$

wobei wir verwendet haben, dass man für negatives c die Integrationsgrenzen vertauschen muss (da $-b < -a$), d.h.

$$\int_{-a|c|}^{-b|c|} \frac{dx}{-|c|} f\left(\frac{x}{-|c|}\right) \delta(x) = - \int_{-b|c|}^{-a|c|} \frac{dx}{-|c|} f\left(\frac{x}{-|c|}\right) \delta(x) = \frac{1}{|c|} f(0) .$$

Aus (2) ergibt sich sofort die Beziehung $\delta(ax) = \frac{1}{|c|} \delta(x)$.

(b) Durch partielle Integration findet man

$$\int_a^b dx f(x) \delta'(x) = \underbrace{f(x) \delta(x)}_0 \Big|_a^b - \int_a^b dx f'(x) \delta(x) = -f'(0) ,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die δ Funktion nur bei ihrem Argument von null verschieden ist. Insbesondere ist sie auch am Integrationsrand null, d.h. $\delta(a) = \delta(b) = 0$. Im Falle von $a = 0$ oder $b = 0$ wäre das Integral nicht wohl definiert.

(c) Hier nutzen wir wiederum aus, dass die δ Funktion überall null ist, ausser an ihren Nullstellen. D.h. wir können das Integrationsgebiet aufteilen in alle Teilbereiche um die Nullstellen herum (alle Zwischenbereiche sind null wegen der δ Funktion). Wir schreiben also

$$\begin{aligned} \int dx f(x) \delta(g(x)) &= \sum_n \int_{x_n-\epsilon}^{x_n+\epsilon} dx f(x) \delta(g(x)) \\ &= \sum_n \int_{x_n-\epsilon}^{x_n+\epsilon} dx f(x) \delta(g'(x_n) (x - x_n)) \\ &= \sum_n \int_{x_n-\epsilon}^{x_n+\epsilon} dx f(x) \frac{\delta((x - x_n))}{|g'(x_n)|} \\ &= \int dx f(x) \sum_n \frac{\delta((x - x_n))}{|g'(x_n)|} \end{aligned} \quad (3)$$

wobei die Summe über alle Nullstellen x_n der Funktion $g(x)$ geht. Desweiteren haben wir die Funktion $g(x)$ um ihre Nullstellen entwickelt

$$g(x) \stackrel{x=x_n}{\approx} \underbrace{g(x_n)}_0 + g'(x_n)(x - x_n) + \mathcal{O}((x - x_n)^2) .$$

Da $g(x)$ nur einfach Nullstellen hat, muss gelten $g'(x_n) \neq 0$, und damit können für beliebig kleines $\epsilon \rightarrow 0$ alle höheren Ordnungsbeiträge vernachlässigt werden. Im letzten Schritt (3) haben wir ausgenutzt, dass es keinen Unterschied macht, ob man nur um ein kleines Intervall um x_n integriert, oder über den kompletten Bereich.

(d) Wir berechnen also

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^b dx f(x) \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^b \frac{dx}{\alpha} f(x) \frac{1}{\pi} \frac{1}{(\frac{x}{\alpha})^2 + 1} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\frac{a}{\alpha}}^{\frac{b}{\alpha}} d\tilde{x} f(\alpha\tilde{x}) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\tilde{x}^2 + 1} . \end{aligned}$$

Hier vertauschen wir nun $\lim_{\alpha \rightarrow 0}$ und Integration über x . Das ist eigentlich nur unter gewissen Bedingungen erlaubt, die hier erfüllt sind, nämlich punktweise Konvergenz der Funktionenfolge $f(\alpha\tilde{x}) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\tilde{x}^2 + 1}$ gegen die Grenzfunktion $f(0) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\tilde{x}^2 + 1}$, sowie Integrierbarkeit einer Majorantenfunktion (siehe Lebesgue'scher Grenzwertsatz in jedem fortgeschrittenen Analysisbuch). Damit erhalten wir also

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\frac{a}{\alpha}}^{\frac{b}{\alpha}} d\tilde{x} f(\alpha\tilde{x}) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\tilde{x}^2 + 1} &= \int_{-\infty \cdot \text{sign}(a)}^{\infty \cdot \text{sign}(b)} d\tilde{x} f(0) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\tilde{x}^2 + 1} \\ &= f(0) \frac{1}{\pi} \arctan(\tilde{x}) \Big|_{-\infty \cdot \text{sign}(a)}^{\infty \cdot \text{sign}(b)} \\ &= \begin{cases} f(0) & \text{für } a < 0 < b \\ 0 & \text{für } a < b < 0 \text{ oder } 0 < a < b \end{cases} , \end{aligned}$$

mit $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$.

(e) Damit das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$ gegen unendlich konvergiert fügt man wie angegeben den Faktor $e^{-\alpha|k|}$ hinzu, und betrachtet schliesslich wieder den Limes $\lim_{\alpha \rightarrow 0}$. Mit diesem 'üblichen' Trick findet man

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - \alpha|k|} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{dk}{2\pi} e^{k(ix + \alpha)} + \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{k(ix - \alpha)} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{k(ix + \alpha)}}{(ix + \alpha)} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{k(ix - \alpha)}}{(ix - \alpha)} \Big|_0^{\infty} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{(ix + \alpha)} - \frac{1}{(ix - \alpha)} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{-2\alpha}{(-x^2 - \alpha^2)} \right\} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} \\ &= \delta_L(x) . \end{aligned}$$

2. Harmonischer Oszillator mit beliebiger Anregung

(11 + 14 = 25 Punkte)

Gegeben ist die Green'sche Funktion

$$G(t) = \theta(t) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} ,$$

(mit $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$) und die Vorschrift wie man daraus die partikuläre Lösung erhält

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t-t') f(t') . \quad (4)$$

Mathematisch handelt es sich hierbei um eine Faltung.

(a) Für eine harmonische Anregung der Form $f(t) = f_0 e^{i\omega t}$ berechnen wir also

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^t dt' e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \frac{\sin(\Omega(t-t'))}{\Omega} f_0 e^{i\omega t'} \quad (5)$$

$$= \left| \frac{d\tilde{t}}{dt'} = 1 \right| = \int_{-\infty}^0 d\tilde{t} e^{\frac{\gamma}{2}\tilde{t}} \frac{\sin(-\Omega\tilde{t})}{\Omega} f_0 e^{i\omega(t+\tilde{t})} \quad (6)$$

$$= f_0 A(\omega) e^{i\omega t} , \quad (7)$$

und weiter

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \int_{-\infty}^0 d\tilde{t} e^{\frac{\gamma}{2}\tilde{t}} \frac{\sin(-\Omega\tilde{t})}{\Omega} e^{i\omega\tilde{t}} \\ &= \frac{1}{2i\Omega} \int_{-\infty}^0 d\tilde{t} \left\{ e^{\tilde{t}(\frac{\gamma}{2}+i\omega-i\Omega)} - e^{\tilde{t}(\frac{\gamma}{2}+i\omega+i\Omega)} \right\} \\ &= \frac{1}{2i\Omega} \left\{ \frac{e^{\tilde{t}(\frac{\gamma}{2}+i\omega-i\Omega)}}{(\frac{\gamma}{2}+i\omega-i\Omega)} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{\tilde{t}(\frac{\gamma}{2}+i\omega+i\Omega)}}{(\frac{\gamma}{2}+i\omega+i\Omega)} \Big|_{-\infty}^0 \right\} \\ &= \frac{1}{2i\Omega} \left\{ \frac{1}{(\frac{\gamma}{2}+i\omega-i\Omega)} - \frac{1}{(\frac{\gamma}{2}+i\omega+i\Omega)} \right\} \\ &= \frac{1}{2i\Omega} \left\{ \frac{2i\Omega}{((\frac{\gamma}{2}+i\omega)^2 + \Omega^2)} \right\} \\ &= \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} . \end{aligned} \quad (8)$$

In (8) haben wir ausgenutzt das die Exponentialfunktion bei $-\infty$ verschwindet. Das gilt insbesondere in dem Fall, dass $\Omega = i\Gamma$ mit $\Gamma = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$, da dann $\frac{\gamma}{2} > \Gamma$.

(b) Hier betrachten wir eine harmonische Pulsanregung der Form $f(t) = f_0 \delta(\sin(\omega t))$. Um die δ Funktion damit auszuwerten, wenden wir die Relation (2) des Aufgabenblattes an. Mit den Nullstellen $t_n = \frac{n\pi}{\omega}$, ($n \in \mathbb{Z}$) drücken wir die δ Funktion aus als

$$\delta(\sin(\omega t)) = \sum_n \frac{\delta(t-t_n)}{|\omega \cos(\omega t_n)|} = \frac{1}{\omega} \sum_n \delta(t-t_n) .$$

Damit ergibt sich für die partikuläre Lösung (4)

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^t dt' e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \frac{\sin(\Omega(t-t'))}{\Omega} f_0 \delta(\sin(\omega t')) \quad (9)$$

$$= \frac{f_0}{\omega} \int_{-\infty}^t dt' \sum_n e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \frac{\sin(\Omega(t-t'))}{\Omega} \delta(t' - t_n) \quad (10)$$

$$= \frac{f_0}{\omega} \sum_n \theta(t-t_n) e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t_n)} \frac{\sin(\Omega(t-t_n))}{\Omega} . \quad (11)$$

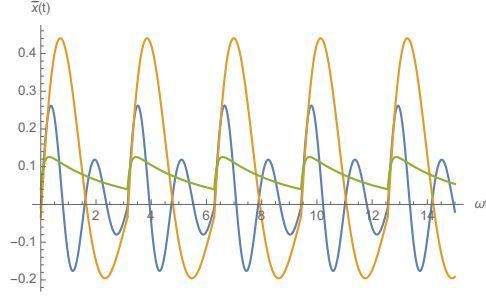


Abbildung 1: Die partikuläre Lösung (11) für zwei Schwingungsfälle (blau $\{\frac{\omega_0}{\omega} = 4, \frac{\gamma}{\omega} = 1\}$, orange $\{\frac{\omega_0}{\omega} = 2, \frac{\gamma}{\omega} = 1\}$) und einen Kriechfall (grün $\{\frac{\omega_0}{\omega} = 2, \frac{\gamma}{\omega} = 10\}$).

Die Heaviside Funktion $\theta(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$ trägt der Tatsache Rechnung, dass in dem Integral in (10) nur jene Nullstellen beitragen für die gilt $t_n < t$. Für drei Parameterwerte haben wir die Lösung (11) in Abbildung 1 geplottet. Offensichtlich ist die Funktion periodisch mit $\omega T = \pi$. Das liegt daran, dass die Antriebskraft eine gerade Funktion ist, d.h.

$$f(-t) = f_0 \delta(\sin(-\omega t)) = f_0 \delta(-\sin(\omega t)) = f_0 \frac{1}{|-1|} \delta(\sin(\omega t)) = f(t) ,$$

und somit kann äquivalent geschrieben werden $f(t) = f_0 \delta(|\sin(\omega t)|)$. An letzter Schreibweise lässt sich direkt ablesen, dass die Anregung (und damit auch die resultierende ‘Schwingung’) π -periodisch ist. Um die Periodizität zu beweisen, berechnen wir also

$$\bar{x}(t + \frac{\pi}{\omega}) = \frac{f_0}{\omega} \sum_n \theta(t - \frac{(n-1)\pi}{\omega}) e^{-\frac{\gamma}{2}(t - \frac{(n-1)\pi}{\omega})} \frac{\sin(\Omega(t - \frac{(n-1)\pi}{\omega}))}{\Omega} \quad (12)$$

$$= \left| \bar{n} = n - 1 \right| = \frac{f_0}{\omega} \sum_{\bar{n}} \theta(t - \frac{\bar{n}\pi}{\omega}) e^{-\frac{\gamma}{2}(t - \frac{\bar{n}\pi}{\omega})} \frac{\sin(\Omega(t - \frac{\bar{n}\pi}{\omega}))}{\Omega} \quad (13)$$

$$= \bar{x}(t) . \quad (14)$$