Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian
M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Blatt 10
Abgabe 08.01.2019

Infobox: Anmeldung Vorleistung

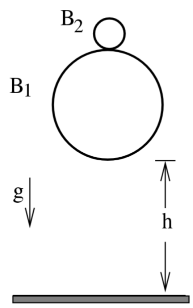
Die Anmeldung zur Vorleistung im Campus System unter campus.studium.kit.edu ist ab heute (10.12.18) freigeschaltet, und bis einschließlich Samstag (02.02.19) um 12:00 Uhr möglich. Die (Wieder-)Abmeldung von der Vorleistung ist ebenfalls nur bis zum 02.02.19 möglich.

1. Elastischer Stoß (30 Punkte)

In einem Stoßprozess im freien Raum sei der Gesamtimpuls $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ mit $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ eine Erhaltungsgröße. In dem Fall dass zusätzlich keine Energie in inneren Anregungen wie Verformungen oder Wärmeproduktion 'verloren' geht, spricht man von einem elastischen Stoß, andernfalls heisst der Stoß inelastisch. In dieser Aufgabe sollen alle Stöße elastischer Natur sein.

(a) Betrachten Sie einen Zwei-Körper Stoßprozess[1], bei dem ein Körper (m_1, v_1) mit einem zweiten Körper (m_2, v_2) zusammenstößt. Nutzen Sie die Impuls- und die Energieerhaltung um die Geschwindigkeiten v_1' und v_2' direkt nach dem Stoßprozess als Funktionen von m_1, m_2, v_1 und v_2 zu berechnen.
Tipp : Die gekoppelten Gleichungen lassen sich geschickt lösen, indem beide Gleichungen nach den Massen sortiert, und anschließend durcheinander dividiert werden.

Auf Grund aufkommender Langeweile während der Feiertage nehmen Sie sich einen Basketball B_1 (m_1, R_1) und einen Tennisball B_2 (m_2, R_2) zur Hand, und lassen beide wie gezeichnet aus einer Höhe h zum Zeitpunkt $t = 0$ zu Boden fallen. Nun würden Sie gerne die maximale Höhe des Tennisballes nach dem Aufprall berechnen, und gehen diesbezüglich wie folgt vor.



(b) Mit welchen Geschwindigkeiten treffen die beiden Bälle zum Zeitpunkt t_1 auf dem Boden auf ?

(c) Wie würden die maximalen Höhen h_1' und h_2' nach dem Stoß lauten, wenn der Stoß **exakt** zum gleichen Zeitpunkt t_a stattfinden würde ?

(d) Nehmen Sie von nun an an, dass die Stöße sukkzessive stattfinden, d.h. zu einem Zeitpunkt $t_a + \epsilon$ stößt Ball 1 elastisch mit dem Boden, und gleich danach $(t_a + 2\epsilon)$ stößt Ball 1 elastisch mit Ball 2 zusammen. Mit welchen Geschwindigkeiten bewegen sich die beiden Bälle gleich nach dem Stoßprozess zum Zeitpunkt $t_a + 2\epsilon$ wieder nach oben ?

(e) Welche maximalen Höhen h_1' und h_2' erreichen die beiden Bälle nach dem Stoß in diesem Fall ?
Wie lauten die Höhen im Fall $m_1 \gg m_2$, entwickelt bis einschließlich der Ordnung $\mathcal{O}(\frac{m_2}{m_1})$?

(*) Überlegen Sie sich, was passiert wenn Sie Basketball und Tennisball vertauschen.

2. Silvester-Rakete (40 Punkte)

Sie möchten das Ende des Jahres gebührend feiern. Da Sie sich jedoch selber keine Raketen gekauft haben, und dem Spektakel nur beiwohnen, möchten Sie zumindest die Trajektorie einer Silvester-Rakete beschreiben, und ihre Freunde mit Raketen-Funfacts (Abhebbedingung, Aufstiegszeit, ..) beeindrucken. Dabei soll die Rakete senkrecht nach oben starten $(z(0) = 0,\ \dot{z}(0) = 0)$, und das Gravitationsfeld der Erde als homogen betrachtet werden.

[1] Dies kann in einer Dimension durchgeführt werden.

Die Rakete nutzt einen Rückstoßantrieb aus, bei dem kleine Teilchen mit einer kostanten Geschwindigkeit $v_g > 0$ relativ zur Rakete nach hinten ausgestoßen werden, um damit Schub zu erzeugen.

(a) Um die Bewegungsgleichung der Rakete herzuleiten, nutzt man die Impulserhaltung aus. Betrachten Sie dazu den Impuls der Rakete (Masse $M(t)$) bevor, und den Impuls des Systems nachdem ein Teilchen der Masse $m_t = -\Delta m > 0$ ausgestoßen wurde. Zeigen Sie, dass die resultierende Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{z}(t) = -v_g \frac{\dot{m}(t)}{M(t)} - g \ , \tag{1}$$

wobei $\dot{m}(t) = \frac{dm}{dt}$ die Rate der Massenabnahme der Rakete beschreibt.
Tipp : (i) Arbeiten Sie im 'Beobachter-System'. (ii) Dividieren Sie die Gleichung der Impulserhaltung durch Δt und betrachten Sie den 'infinitesimalen Grenzfall' $\Delta y \to dy$ (y beliebig). (iii) Bearbeiten Sie das Problem zunächst ohne Gravitation, und fügen Sie die Gewichtskraft später adäquat hinzu.

Die Masse der Rakete $M(t) = M_0 + m(t)$ setzt sich aus dem konstanten Teil M_0 (Gehäuse, Fracht, usw.) und der Treibstoffmasse $m(t)$ zusammen. Nehmen Sie an, die Rate der Massenabnahme sei konstant $\dot{m} = -\frac{m_0}{\tau}$, wobei m_0 die anfängliche Treibstoffmenge beschreibt, und τ den Brennschluss.

(b) Bestimmen Sie $m(t)$. Nach welcher Zeit ist aller Treibstoff verbrannt? Zeigen Sie nun, dass die Bewegungsgleichung (1) die Form

$$\ddot{z}(t) = \frac{v_g}{\mu\tau - t} - g \ , \tag{2}$$

annimmt, wobei μ zu bestimmen ist.

(c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\dot{z}(t)$ und die Trajektorie $z(t)$ der Rakete. Entwickeln Sie die Geschwindigkeit für $t \ll \tau$, und stellen Sie eine Bedingung auf, die erfüllt sein muss, damit die Rakete abheben kann.
Tipp : Das Integral $\int dx \, \ln(1-x) = -x - (1-x)\ln(1-x)$ könnte von Nutzen sein.

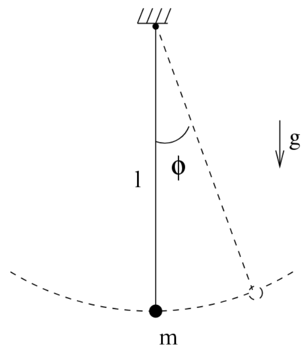
(d) Wie schnell ist die Rakete bei Brennschluss τ und wie hoch ist sie gekommen ? Berechnen Sie danach die Zeit t_{max} nach der die Rakete ihre maximale Höhe erreicht hat.[2]

3. Mathematisches Pendel (30 Punkte)

Die Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels lautet

$$m\ddot{\phi} + m\,\omega_0^2 \sin\phi = 0 \ , \tag{3}$$

mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ die Schwingungsfrequenz im Falle kleiner Auslenkungen angibt. Die Gleichung (3) ist zwar mit elliptischen Funktionen analytisch noch lösbar, dies soll hier jedoch nicht geschehen. Stattdessen soll die Energieerhaltung ausgenutzt werden um die Periodendauer zu bestimmen. Dazu gehen Sie wie folgt vor.



(a) Legen Sie den Koordinatenursprung in die Aufhängung des Seiles (siehe Skizze) in der (x, z)-Ebene, und beschreiben Sie die Trajekorie der Kugel auf der Kreisbahn in Polarkoordinaten [3], als auch deren Geschwindigkeit. Nutzen Sie $l = const.$

(b) Drücken Sie nun die kinetische Energie der Kugel $E_{kin}(\phi)$ und die potentielle Energie $E_{pot}(\phi)$ als Funktionen von ϕ aus. Wie groß ist die maximale Auslenkung ϕ_0 des Pendels?

[2] Angenommen die Rakete würde nicht schon vorher explodieren.
[3] Sie haben Polarkoordinaten auf Blatt 2 kennengelernt. Die Wahl der Basisvektoren kann angepasst werden.

(c) Nutzen Sie die Energieerhaltung um die Umkehrfunktion der Bahnkurve $t(\phi)$ zu bestimmen, und zeigen Sie, dass für die Periodendauer gilt

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}} \ .$$

(d) Nutzen Sie $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\frac{\alpha}{2})$ und zeigen Sie, dass die Substitution $\sin x = \frac{\sin(\frac{\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi_0}{2})}$ auf den Ausdruck

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \ ,$$

mit $k = \sin(\frac{\phi_0}{2})$ führt. Bei dem Integral handelt es sich gerade um das vollständige elliptische Integral $K(k)$.

(e) Bestimmen Sie die Abweichung zur harmonischen Schwingungsdauer $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, in dem Fall $k \ll 1$.
Tipp : Entwickeln Sie dazu den Integranden, und lösen Sie anschließend die resultierenden Integrale. Das Integral $\int dx\ \sin^2(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$ mag nützlich sein.