

Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian

Blatt 10

M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Lösungsvorschlag

1. Elastischer Stoß

(8 + 5 + 4 + 5 + 8 = 30 Punkte)

In einem Stoßprozess im freien Raum sei der Gesamtimpuls $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ mit $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ eine Erhaltungsgröße. In dem Fall dass zusätzlich keine Energie in inneren Anregungen wie Verformungen oder Wärmeproduktion 'verloren' geht, spricht man von einem elastischen Stoß, andernfalls heisst der Stoß inelastisch. In dieser Aufgabe sollen alle Stöße elastischer Natur sein.

- (a) Wir schreiben also die Impuls- und die Energieerhaltung in der Form $\mathbf{P}_{\text{vorher}} = \mathbf{P}_{\text{nachher}}$ und $E_{\text{vorher}} = E_{\text{nachher}}$. Zunächst machen wir uns klar, dass die potentielle Energie (die nur von der Position abhängen soll) vor und nach dem Stoß identisch ist, und wir sie somit in den Gleichungen ignorieren können. Die Gleichungen lauten

$$\text{Impuls:} \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad (1)$$

$$\text{Energie:} \quad \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{m_1}{2} (v'_1)^2 + \frac{m_2}{2} (v'_2)^2,$$

oder umgeformt

$$\text{Impuls:} \quad m_1(v_1 - v'_1) = -m_2(v_2 - v'_2), \quad (2)$$

$$\text{Energie:} \quad m_1(v_1^2 - (v'_1)^2) = -m_2(v_2^2 - (v'_2)^2). \quad (3)$$

Dividiert man nun (3) durch (2) ergibt sich sofort $v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2$. Aufgelöst nach v'_2 und eingesetzt in (1) erhält man damit

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2, \quad (4)$$

$$\text{und} \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2. \quad (5)$$

- (b) Beide Körper fallen um die gleiche Strecke h im jeweiligen Potential $V_i(z) = m_i g z$ zu Boden. Mittels der Energieerhaltung finden wir (wir messen die Höhe im Schwerpunkt der Bälle.)

$$E_1(0) = E_1(t_a), \quad E_2(0) = E_2(t_a)$$

$$V_1(h + R_1) = E_1^{\text{kin}}(t_a) + V_1(R_1), \quad V_2(h + 2R_1 + R_2) = E_2^{\text{kin}}(t_a) + V_2(2R_1 + R_2)$$

$$m_1 g(h + R_1) = \frac{m_1}{2} v_1^2(t_a) + m_1 g R_1, \quad m_2 g(h + 2R_1 + R_2) = \frac{m_2}{2} v_2^2(t_a) + m_2 g(2R_1 + R_2)$$

$$\rightarrow v_1(t_a) = \sqrt{2gh}, \quad \rightarrow v_2(t_a) = \sqrt{2gh},$$

dass beide Bälle mit der gleichen Geschwindigkeit $\bar{v} = \sqrt{2gh}$ am Boden ankommen.

- (c) Findet der Stoß exakt gleichzeitig statt, so können beide Bälle als ein Objekt betrachtet werden, welches elastisch am Boden stößt, und welches danach in der gleichen Anordnung wieder auf die ursprüngliche Höhe zurück springt. Also wären in diesem Fall

$$h'_1 = h_1 = h + R_1,$$

$$h'_2 = h_2 = h + 2R_1 + R_2.$$

- (d) Nun finden die Stöße infinitesimal nacheinander statt. Zunächst stößt Ball 1 zum Zeitpunkt $t_a + \epsilon$ elastisch am Boden. Hier lauten die Erhaltungssätze

$$\begin{aligned} \text{Impuls:} \quad & m_1 v_1 = m_1 v'_1 + p_{\text{Boden}} , \\ \text{Energie:} \quad & \frac{m_1}{2} v_1^2 = \frac{m_1}{2} (v'_1)^2 . \end{aligned}$$

In einem elastischen Stoß kann der Boden keine Energie aufnehmen, (diese würde sonst inelastisch in innere Anregungen fließen.) und somit gilt $|v'_1| = v_1$, und da der Ball nicht in die gleiche Richtung weiter fallen kann muss gelten $v_1(t_a + \epsilon) \equiv v'_1 = -v_1 = \bar{v}$ (mit $v_1 = -\bar{v}$ da der Ball nach unten fällt.). Somit muss der Boden den Impuls $p_{\text{Boden}} = 2m_1 v_1$ aufnehmen.

Nun stößt Ball 1 zum Zeitpunkt $t_a + 2\epsilon$ elastisch mit dem Ball 2 zusammen. Die dazugehörigen Gleichungen in den Erhaltungssätzen lauten

$$\begin{aligned} \text{Impuls:} \quad & m_1 v_1(t_a + \epsilon) + m_2 v_2(t_a + \epsilon) = m_1 v_1(t_a + 2\epsilon) + m_2 v_2(t_a + 2\epsilon) , \\ \text{Energie:} \quad & \frac{m_1}{2} v_1(t_a + \epsilon)^2 + \frac{m_2}{2} v_2(t_a + \epsilon)^2 = \frac{m_1}{2} v_1(t_a + 2\epsilon)^2 + \frac{m_2}{2} v_2(t_a + 2\epsilon)^2 , \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \text{Impuls:} \quad & m_1 \bar{v} - m_2 \bar{v} = m_1 v_1(t_a + 2\epsilon) + m_2 v_2(t_a + 2\epsilon) , \\ \text{Energie:} \quad & \frac{m_1}{2} \bar{v}^2 + \frac{m_2}{2} \bar{v}^2 = \frac{m_1}{2} v_1(t_a + 2\epsilon)^2 + \frac{m_2}{2} v_2(t_a + 2\epsilon)^2 . \end{aligned}$$

Eingesetzt in (4),(5) finden wir (,wobei $v_1 = \bar{v}$ und $v_2 = -\bar{v}$)

$$v_1(t_a + 2\epsilon) = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} \bar{v} , \quad (6)$$

$$v_2(t_a + 2\epsilon) = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \bar{v} . \quad (7)$$

- (e) Um die maximalen Höhen h'_1 und h'_2 zu berechnen nutzen wir erneut die Energieerhaltung aus. Die maximale Höhe ist erreicht, wenn alle kinetische Energie in potentielle Energie umgewandelt wurde. Wir berechnen

$$\begin{aligned} V_1(h'_1) &= E_1(t_a + 2\epsilon) , & V_2(h'_2) &= E_2(t_a + 2\epsilon) \\ m_1 g h'_1 &= \frac{m_1}{2} v_1^2(t_a + 2\epsilon) + m_1 g R_1 , & m_2 g h'_2 &= \frac{m_2}{2} v_2^2(t_a + 2\epsilon) + m_2 g (2R_1 + R_2) \\ \rightarrow \quad h'_1 &= R_1 + \frac{1}{2g} \frac{(m_1 - 3m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \bar{v}^2 , & \rightarrow \quad h'_2 &= 2R_1 + R_2 + \frac{1}{2g} \frac{(3m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \bar{v}^2 \\ h'_1 &= R_1 + h \left(\frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 , & h'_2 &= 2R_1 + R_2 + h \left(\frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 . \end{aligned}$$

Nun betrachten wir den Fall $m_1 \gg m_2$ und entwickeln die beiden Höhen (mit $\delta m = \frac{m_2}{m_1} \ll 1$),

$$\begin{aligned} h'_1 &= R_1 + h \left(1 - \frac{4m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = R_1 + h \left(1 - \frac{4\delta m}{1 + \delta m} \right)^2 \\ &\approx R_1 + h \left(1 - \frac{8\delta m}{1 + \delta m} + \mathcal{O}(\delta m^2) \right) \approx \underbrace{R_1 + h}_{h_1^{(0)}} - 8h\delta m , \\ h'_2 &= 2R_1 + R_2 + h \left(3 - \frac{4m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \approx 2R_1 + R_2 + h \left(9 - \frac{24\delta m}{1 + \delta m} + \mathcal{O}(\delta m^2) \right) \\ &\approx \underbrace{2R_1 + R_2 + h}_{h_2^{(0)}} + 8h - 24h\delta m , \end{aligned}$$

wobei wir alle Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\delta m^2)$ vernachlässigt haben. Der Tennisball (im Grenzfall $m_1 \gg m_2$) erreicht nach dem Stoß offenbar fast die neun-fache Höhe!

- (*) Vertauschen wir beide Bälle, so stößt zuerst der Tennisball am Boden und direkt danach mit dem Basketball zusammen. Nun ist Ball 1 der Tennisball mit der Masse m_1 , und Ball 2 der Basketball. Die Gleichungen (6,7) gelten natürlich weiterhin,

$$v_1(t_a + 2\epsilon) = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} \bar{v} , \quad (8)$$

$$v_2(t_a + 2\epsilon) = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \bar{v} . \quad (9)$$

In dem Grenzfall $m_1 \ll m_2$ bewegen sich nach dem Stoß beide Bälle nach unten. Es kommt zu weiteren Stößen. Das Problem wird etwas unübersichtlich.

Betrachten wir einen etwas weniger drastischen Fall, $m_2 = 2m_1$. Nun gilt $v_1 = -\frac{5}{3}\bar{v}$ und $v_2 = \frac{1}{3}\bar{v}$. In diesem Fall prallt also der Basketball nach oben, wohingegen der Tennisball erneut nach unten wegprallt. Der Tennisball stößt also erneut an dem Boden, wird danach den Basketball einholen, und erneut mit ihm zusammenstoßen. Dieser Prozess könnte sich auch noch häufiger wiederholen. Wir wollen das hier nicht genau nachrechnen.

2. Silvester-Rakete

(12 + 8 + 10 + 10 = 40 Punkte)

- (a) Wir betrachten die beiden Zeitpunkte t bevor ein Teilchen ausgestoßen wurde, und $t + \Delta t$ nachdem ein Teilchen ausgestoßen wurde (,und vernachlässigen die Gravitation zunächst). Der Impuls der Rakete zum Zeitpunkt t lautet (index s für System, r für Rakete und t für Teilchen)

$$P_s(t) = P_r(t) = M(t) \dot{z}(t) . \quad (10)$$

Zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ lautet der Impuls der Rakete $P_r(t + \Delta t) = (M(t) + \Delta m) (\dot{z}(t) + \Delta \dot{z})$. Da das Teilchen mit v_g relativ zur Rakete (wobei $\dot{z}(t) \geq 0$) ausgestoßen wird, lautet dessen Impuls im Beobachter-System $P_t = -m_t (v_g - \dot{z}(t))$ (das Minuszeichen, weil es sich nach unten bewegt, insbesondere muss es sich zum Zeitpunkt $t = 0$ nach unten bewegen.). Somit lautet der Gesamtimpuls

$$P_s(t + \Delta t) = P_r(t + \Delta t) + P_t = (M(t) + \Delta m) (\dot{z}(t) + \Delta \dot{z}) - m_t (v_g - \dot{z}(t)) . \quad (11)$$

Nutzen wir nun die Impulserhaltung und den Fakt, dass die Masse des Teilchens gerade der Massenabnahme der Rakete entsprechen muss, d.h. $m_t = -\Delta m > 0$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} M(t) \dot{z}(t) &= (M(t) + \Delta m) (\dot{z}(t) + \Delta \dot{z}) + \Delta m (v_g - \dot{z}(t)) \\ 0 &= \underbrace{(M(t) + \Delta m)}_{M(t + \Delta t)} \Delta \dot{z} + \Delta m v_g \\ \rightarrow \quad M(t + \Delta t) \frac{\Delta \dot{z}}{\Delta t} &= -\frac{\Delta m}{\Delta t} v_g , \end{aligned}$$

und im Limes infinitesimal kleiner Δt und Δm erhält man

$$M(t) \ddot{z} = -\dot{m} v_g .$$

Dies ist die Schubgleichung im gravitationsfreien Raum. Um die **Gravitationskraft** einzubauen betrachten wir die Impulsänderung der Rakete

$$\Delta P_r = P_r(t + \Delta t) - P_r(t) = M(t) \Delta \dot{z} + \Delta m (\dot{z}(t) + \Delta \dot{z}) \quad (12)$$

und dividieren durch das Zeitintervall Δt um Newton's Gleichung zu erzeugen ($\dot{p} = \sum_i F_i$). An dieser Stelle (siehe (13)) fügen wir die Gewichtskraft der Rakete $-M(t)g$ hinzu. Die Differenz aus (11) und (10) liefert uns also

$$\Delta P_r = -P_t$$

$$\rightarrow \frac{\Delta P_r}{\Delta t} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}(v_g - \dot{z}(t)) - M(t)g \quad (13)$$

$$M(t) \frac{\Delta \dot{z}}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t} \dot{z}(t) + \Delta m \frac{\Delta \dot{z}}{\Delta t} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}(v_g - \dot{z}(t)) - M(t)g \quad (14)$$

$$(M(t) + \Delta m) \frac{\Delta \dot{z}}{\Delta t} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} v_g - M(t)g \quad (15)$$

$$\rightarrow M(t) \ddot{z} = -\dot{m}(t) v_g - M(t)g, \quad (16)$$

und damit die gesuchte Bewegungsgleichung. In Gleichung (14) haben wir Gleichung (12) eingesetzt.

(b) Mittels Separation der Variablen können wir die Massenrate sofort integrieren,

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= -\frac{m_0}{\tau} \\ \int_{m_0}^{m(t)} dm' &= -\frac{m_0}{\tau} \int_0^t dt' \\ m(t) &= m_0 - m_0 \frac{t}{\tau} = m_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right). \end{aligned}$$

Wir sehen sofort, dass nach $t = \tau$ aller Treibstoff verbrannt ist. (Daher heisst τ auch Brennschluss.) die resultierenden Bewegungsgleichungen gelten also nur im Intervall $0 < t < \tau$. Danach führt die Rakete einen freien Fall aus. Nun setzen wir die Masse $m(t)$ in die Bewegungsgleichung ein,

$$\ddot{z}(t) = -\frac{\dot{m}(t)}{M(t)} v_g - g = \frac{\frac{m_0}{\tau}}{M_0 + m_0 - m_0 \frac{t}{\tau}} v_g - g = \frac{v_g}{\frac{M_0 + m_0}{m_0} \tau - t} - g \equiv \frac{v_g}{\mu \tau - t} - g, \quad (17)$$

und somit lautet die gesuchte Konstante $\mu = \frac{M_0 + m_0}{m_0} = 1 + \frac{M_0}{m_0}$.

(c) Für die Geschwindigkeit ergibt sich (widerum mittels Separation der Variablen)

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \int_0^t dt' \left(\frac{v_g}{\mu \tau - t'} - g \right) = -v_g \ln(\mu \tau - t') \Big|_0^t - gt \\ \dot{z}(t) &= -v_g \ln\left(\frac{\mu \tau - t}{\mu \tau}\right) - gt = -v_g \ln\left(1 - \frac{t}{\mu \tau}\right) - gt, \end{aligned} \quad (18)$$

wobei wir die Anfangsbedingung $\dot{z}(0) = 0$ eingesetzt haben.

Für die Trajektorie ergibt sich

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_0^t dt' \left(-v_g \ln\left(1 - \frac{t'}{\mu \tau}\right) - gt' \right) = \left| \frac{dx}{dt'} = \frac{1}{\mu \tau} \right|^{x=\frac{t'}{\mu \tau}} \\ &= -v_g \mu \tau \int_0^{\frac{t}{\mu \tau}} dx \ln(1 - x) - \frac{1}{2} gt^2 \\ &= -v_g \mu \tau \left(-\frac{t}{\mu \tau} - \left(1 - \frac{t}{\mu \tau}\right) \ln\left(1 - \frac{t}{\mu \tau}\right) \right) - \frac{1}{2} gt^2 \\ &= v_g t + v_g \mu \tau \left(1 - \frac{t}{\mu \tau}\right) \ln\left(1 - \frac{t}{\mu \tau}\right) - \frac{1}{2} gt^2, \end{aligned} \quad (19)$$

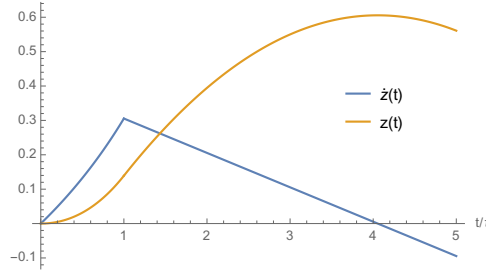


Abbildung 1: Trajektorie $\frac{z(t)}{v_g \tau}$ (19,21) und Geschwindigkeit $\frac{\dot{z}(t)}{v_g}$ (18,20) der Rakete für $\frac{g\tau}{v_g} = 0,1$ und $\frac{m_0}{M_0} = 0,5$. Für diese Werte ergibt sich die maximale Zeit (22) zu $t_{max}/\tau = 10 \ln(1,5) \approx 4,05$.

wobei das gegebene Integral auf dem Blatt ausgenutzt wurde. Wir entwickeln (18) in führender Ordnung in $x = \frac{t}{\mu\tau} \ll 1$ und erhalten $\ln(1-x) \approx -x$

$$\dot{z}(t) \approx v_g \frac{t}{\mu\tau} - gt = \left(\frac{v_g}{\mu\tau} - g \right) t .$$

Offensichtlich kann die Rakete nur abheben, wenn gilt $\frac{v_g}{\mu\tau} > g$.

(d) Bei Brennschluss gilt

$$\dot{z}(\tau) = -v_g \ln\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) - g\tau = v_g \ln\left(1 + \frac{m_0}{M_0}\right) - g\tau$$

$$z(\tau) = v_g\tau + v_g\mu\tau\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) - \frac{1}{2}g\tau^2 = v_g\tau \left(1 - \frac{M_0}{m_0} \ln\left(1 + \frac{m_0}{M_0}\right)\right) - \frac{1}{2}g\tau^2 .$$

Danach wirkt lediglich die Gewichtskraft auf die Rakete. Wegen der Geschwindigkeit $\dot{z}(\tau)$ steigt sie jedoch noch ein wenig weiter hoch. Im Zeitintervall $t > \tau$ gilt

$$\begin{aligned} \ddot{z}(t) &= -g \\ \dot{z}(t) &= -g(t - \tau) + \dot{z}(\tau) \end{aligned} \tag{20}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}g(t - \tau)^2 + \dot{z}(\tau)(t - \tau) + z(\tau) . \tag{21}$$

Hierbei wurden die Konstanten so gewählt, dass die Anfangsbedingungen $\dot{z}(\tau) = \dot{z}(\tau)$ und $z(\tau) = z(\tau)$ direkt erfüllt sind. Durch einfache Kurvendiskussion finden wir die maximale Höhe,

$$\dot{z}(t_{max}) \stackrel{!}{=} 0 = -g(t_{max} - \tau) + \dot{z}(\tau) \quad \rightarrow \quad t_{max} = \tau + \frac{\dot{z}(\tau)}{g} = \frac{v_g}{g} \ln\left(1 + \frac{m_0}{M_0}\right) . \tag{22}$$

Die gesamte Trajektorie und deren Geschwindigkeit ist in Bild (1) geplottet.

3. Mathematisches Pendel

(6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30 Punkte)

Die Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels lautet

$$m\ddot{\phi} + m\omega_0^2 \sin \phi = 0 , \tag{23}$$

mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ die Schwingungsfrequenz im Falle kleiner Auslenkungen angibt. Die Gleichung (23) ist zwar mit elliptischen Funktionen analytisch noch lösbar, dies soll hier jedoch nicht geschehen. Stattdessen soll die Energieerhaltung ausgenutzt werden um die Periodendauer zu bestimmen. Dazu gehen Sie wie folgt vor.

- (a) Da $x(\phi = 0) = 0$ sein soll und $z(\phi = 0) < 0$, bietet es sich an die polaren Einheitsvektoren so zu wählen

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix},$$

so dass die Position der Kugel und ihre Geschwindigkeit (der Vollständigkeit halber auch deren Beschleunigung) ausgedrückt werden kann als

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= r \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{r}}(t) &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) &= (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) \mathbf{e}_\phi, \end{aligned}$$

wobei wir noch zugelassen haben, dass sich der Radius variieren könnte. Verwenden wir, dass das Seil immer starr bleibt, also $r = l = \text{const}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= l \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{r}}(t) &= l \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi. \end{aligned}$$

- (b) Damit lassen sich die kinetische Energie und potentielle Energie ausdrücken als

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}(t)^2 = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 \\ E_{pot} &= mg z(t) = -mgl \cos \phi. \end{aligned}$$

Da $E = E_{kin} + E_{pot}$ ergibt sich die maximale Auslenkung ϕ_0 (wenn alle kinetische Energie in potentielle Energie umgewandelt ist) zu

$$E = -mgl \cos \phi_0 \quad \rightarrow \quad \cos \phi_0 = \frac{-E}{mgl}.$$

Beachten Sie, dass für die Energie in diesem Problem gilt $E \geq -mgl$, d.h. die Energie ist negativ solange $-\frac{\pi}{2} < \phi_0 < \frac{\pi}{2}$. Für größere Winkel lässt die Seilspannung nach, und die Bewegung wird etwas komplizierter.

- (c) Nun isolieren wir $\frac{d\phi}{dt}$ in der Energieerhaltung, und integrieren die Gleichung mittels Separation der Variablen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} E &= E_{kin} + E_{pot} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 - mgl \cos \phi \\ \rightarrow \quad \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 &= \frac{2}{ml^2} (E + mgl \cos \phi) = 2\omega_0^2 (\cos \phi - \cos \phi_0) \\ \frac{\pm 1}{\sqrt{2}\omega_0} \int_{\phi(0)}^{\phi(t)} \frac{d\phi'}{\sqrt{\cos \phi' - \cos \phi_0}} &= \int_0^t dt' = t(\phi). \end{aligned}$$

Das (± 1) sollte man korrekter Weise durch $\text{sign}(\phi(t) - \phi(0))$ ersetzen. Interessieren wir uns jedoch nur für die Periodendauer, so nutzen wir aus, dass die Auslenkung aus der Ruhelage $\phi = 0$ bis $\phi = \phi_0$ gerade einer Viertel Periode entspricht. Damit wird das Integral

$$T = \frac{4}{\sqrt{2}\omega_0} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi'}{\sqrt{\cos \phi' - \cos \phi_0}} = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi'}{\sqrt{\cos \phi' - \cos \phi_0}}.$$

(d) Nutzt man zunächst die Relation $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2(\frac{\alpha}{2})$, findet man

$$T = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi'}{\sqrt{\sin^2(\frac{\phi_0}{2}) - \sin^2(\frac{\phi'}{2})}} . \quad (24)$$

Um die Substitution $\sin x = \frac{\sin(\frac{\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi_0}{2})}$ durchzuführen berechnen wir zunächst das Integralmaß, d.h. wir differenzieren

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin x &= \frac{d}{dx} \frac{\sin(\frac{\phi(x)}{2})}{\sin(\frac{\phi_0}{2})} \\ \cos x &= \frac{1}{2} \frac{\cos(\frac{\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi_0}{2})} \frac{d\phi}{dx} \\ \rightarrow d\phi &= dx \frac{2 \cos(x) \sin(\frac{\phi_0}{2})}{\cos(\frac{\phi}{2})} = dx \frac{2 \cos(x) \sin(\frac{\phi_0}{2})}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{\phi}{2})}} = dx \frac{2 \cos(x) \sin(\frac{\phi_0}{2})}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{\phi_0}{2}) \sin^2(x)}} . \end{aligned}$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass $\cos(\frac{\phi}{2}) > 0$ auf dem Intervall $0 < \phi < \phi_0$ wobei weiterhin $\phi_0 < \frac{\pi}{2}$ gelten soll. Ebenfalls gilt $\sin(\frac{\phi_0}{2}) > 0$ auf dem Intervall. Die Integralgrenzen werden mit $x(\phi) = \arcsin\left(\frac{\sin(\frac{\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi_0}{2})}\right)$ zu $x(\phi = 0) = 0$ und $x(\phi = \phi_0) = \frac{\pi}{2}$. Setzen wir alles in (24) ein, ergibt sich

$$T = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin(\frac{\phi_0}{2}) \sqrt{1 - \sin^2(x)}} \frac{2 \cos(x) \sin(\frac{\phi_0}{2})}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{\phi_0}{2}) \sin^2(x)}} = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(x)}} , \quad (25)$$

mit $k = \sin(\frac{\phi_0}{2})$.

(e) Der Einfachheit halber entwickeln wir die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}} \approx 1 + \frac{1}{2} y ,$$

wobei $y = k^2 \sin^2(x)$. Damit lautet das Integral im Grenzfall kleiner Auslenkungen

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2(x) \right) = \frac{2\pi}{\omega_0} + \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{k^2}{2} = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \right) .$$

Wie zu erwarten war wird die Periodendauer energieabhängig. Diese Tatsache kann man auch deutlich dem Bild 2 entnehmen.

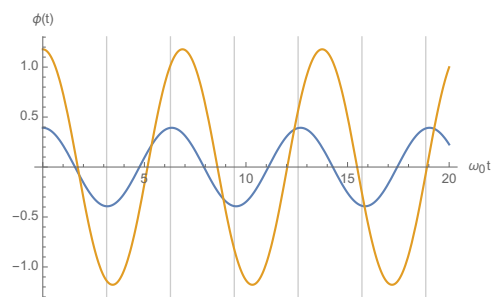


Abbildung 2: Exakte Lösung für $\phi(t)$ für $\phi_0 = \frac{\pi}{8}$ (blau) und für $\phi_0 = \frac{3\pi}{8}$ (orange). Die Gitterlinien markieren Vielfache von π . Während die blaue Kurve noch annähernd eine Periode $\frac{2\pi}{\omega_0}$ hat, weicht orangene Kurve schon deutlich ab.