Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian
M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Blatt 12
Abgabe 22.01.2019

Infobox: Anmeldung Vorleistung

Die Anmeldung zur Vorleistung ist im Campus System unter campus.studium.kit.edu freigeschaltet, und bis einschließlich Samstag **02.02.2019** um 12:00 Uhr möglich.
Die (Wieder-)Abmeldung von der Vorleistung ist ebenfalls nur bis zum 02.02.19 möglich.

1. Drehmatrizen Teil 2 (25 Punkte)

Betrachten Sie die Matrizen

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

welche Drehungen um die Hauptachsen $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, und $\boldsymbol{e}_z$ beschreiben.

(a) Berechnen Sie die sogenannten Erzeugenden J_i ($i \in \{x, y, z\}$), welche jeweils eine infinitesimale Drehung um die Achse i beschreiben, d.h. $R_i(\alpha) = \mathbb{1} + \alpha J_i$ (für $\alpha \to 0$). Am einfachsten lässt sich J_i ermitteln aus

$$J_i = \frac{dR_i(\alpha)}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0} \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Erzeugenden J_i die Kommutatorrelationen

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} J_k \tag{2}$$

erfüllen, wobei $[A, B] \equiv AB - BA$ der Kommutator ist. Berechnen Sie ausserdem J_i^2.

(c) Nutzen Sie die Taylor-Darstellungen der Funktionen $\cos(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \varphi^{2n}/(2n)!$ und $\sin(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \varphi^{2n+1}/(2n+1)!$ um zu beweisen, dass die Drehmatrix $R_i(\alpha)$ geschrieben werden kann als

$$R_i(\alpha) = e^{\alpha J_i}. \tag{3}$$

Die Exponentialfunktion von Matrizen ist als Taylor-Reihe $e^a = \sum_{n=0}^{\infty} a^n/n!$ zu verstehen. Aus der obigen Eigenschaft lässt sich dann eine allgemeine Drehung schreiben als

$$R(\boldsymbol{\alpha}) = e^{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{J}}, \tag{4}$$

mit $\boldsymbol{J} = (J_x, J_y, J_z)$ und $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\boldsymbol{n}$, wobei α den Drehwinkel und der Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$ die Drehachse beschreibt.

(d) Wir definieren nun die *zeitabhängige* Drehmatrix $R_{\boldsymbol{\omega}} = R(\boldsymbol{\omega}t)$, mit $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$. Berechnen Sie $\dot{R}_{\boldsymbol{\omega}}$ und leiten Sie damit die Beziehungen

$$R_{\boldsymbol{\omega}}\dot{R}_{\boldsymbol{\omega}} = (\omega J_z)R_{2\boldsymbol{\omega}}, \qquad R_{\boldsymbol{\omega}}^T\dot{R}_{\boldsymbol{\omega}} = \omega J_z, \text{ und } \qquad (\dot{R}_{\boldsymbol{\omega}})^T\dot{R}_{\boldsymbol{\omega}} = -(\omega J_z)^2 \tag{5}$$

her.

Tipp: Die Eigenschaften $Ae^B = e^B A$ und $e^A e^B = e^{A+B}$ für kommutierende Matrizen, d.h. $[A, B] = 0$, dürfen ohne Beweis benutzt werden. Etwas leichter kann man sich von der Beziehung $[\exp(A)]^T = \exp(A^T)$

2. Die Gezeiten (40 Punkte)

(a) Wir betrachten zwei massive Körper, die sich vom Gravitationspotential getrieben gegenseitig umkreisen. Ihr Abstand r_0 bleibe dabei konstant. Zeigen Sie, dass die Positionen $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ der beiden Massen m_1 und m_2 die Form

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} - (m_2/M)\boldsymbol{r}_0 \qquad\qquad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} + (m_1/M)\boldsymbol{r}_0 \tag{6}$$

annehmen mit dem Verbindungsvektor $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ zwischen den beiden Massen, dem Schwerpunkt $\boldsymbol{R} = (m_1/M)\boldsymbol{r}_1 + (m_2/M)\boldsymbol{r}_2$, und der gesamten Masse $M = m_1 + m_2$.

(b) Wir wählen das Koordinatensystem nun so, dass die Schwerpunktskoordinate (Baryzentrum) $\boldsymbol{R}$ im Ursprung liegt, also $\boldsymbol{R} = 0$. Nutzen Sie ein Keplersches Gesetz um zu zeigen, dass die Drehfrequenz $\omega = (GM/r_0^3)^{1/2}$ ist.

(c) Wir positionieren uns für den Rest dieser Aufgabe in das mit den Massen rotierende Bezugssystem. Dazu führen wir eine Transformation $\boldsymbol{r}' = R_{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}$ durch, mit $R_{\boldsymbol{\omega}} = R(\boldsymbol{\omega}t)$ eine Rotationsmatrix um die z-Achse mit $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$. Ausserdem sei die x'-Achse entlang der Verbindungslinie zwischen den zwei Massen, siehe Abbildung 1. Zeigen Sie, dass sich die kinetische Energie einer Testmasse m am Ort $\boldsymbol{r}$ transformiert zu

$$m\dot{\boldsymbol{r}}^2/2 \qquad \longrightarrow \qquad m(\dot{\boldsymbol{r}}')^2/2 + m\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}'\times\dot{\boldsymbol{r}}') + m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')^2/2, \tag{7}$$

und dass für die potentielle Energie gilt $V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) = V(|\boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_2'|)$.

Hinweis: Beachten Sie, dass für ein Vektor $\boldsymbol{v}$ gilt: $\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}$.

Notiz: Da das mitrotierende System kein Inertialsystem mehr ist, stellt diese Transformation keine Galilei-Transformation dar (siehe Blatt 11).

(d) Körper 1 besitze eine Meeresoberfläche und einen mittleren Radius ρ_1 (in Abwesenheit anderer Gestirne). Eine Testmasse m (Wassermolekül) spürt das Potential $V(\boldsymbol{r}') = V_1(\boldsymbol{r}') + V_2(\boldsymbol{r}') + V_\omega(\boldsymbol{r}')$, wobei $V_i(\boldsymbol{r}') = -Gmm_i/|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_i'|$. Nutzen Sie die Largrange-Funktion (Blatt 5) um zu zeigen, dass das Scheinpotential $V_\omega(\boldsymbol{r}') = -m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')^2/2$ von der Transformation der kinetischen Energie herrührt.

Entwickeln Sie nun $V(\boldsymbol{r}_1' + \boldsymbol{\rho})$ für $\rho/r_1' \ll 1$. Dazu parametrisieren Sie am besten $\boldsymbol{r}_1' = [-(m_2/M)r_0, 0, 0]$ und $\boldsymbol{\rho} = \rho(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ und beschränken sich auf die Rotationsebene ($\theta = \pi/2$). Zeigen Sie, dass unter Berücksichtigung quadratischer Korrekturen $\mathcal{O}[(\rho/r_0)^2]$ gilt

$$V(\boldsymbol{r}_1' + \boldsymbol{\rho}) \approx -\frac{Gm_1}{\rho} - \frac{Gm_2}{r_0}\Big[1 + \frac{m_2}{2M} + (3/2)(\rho/r_0)^2\cos^2(\varphi)\Big]. \tag{8}$$

(e) Die Meeresoberfläche verformt sich so, dass sie einer Äquipotentiallinie folgt, $V(\boldsymbol{r}_1' + \boldsymbol{\rho}) = \text{const}$. Parametrisieren Sie $\rho = \rho_1 + \delta\rho$ und entwickeln Sie das Potential (8) in $\delta\rho/\rho_1 \ll 1$. Lösen Sie die Bestimmungsgleichung für $\delta\rho$ in Abhängigkeit von φ.

(f) Bei welchen Winkeln ist der Radius ρ maximal? Bestimmen Sie den numerischen Wert der Amplitude für die Paare Erde-Mond/Erde-Sonne und diskutieren Sie das Ergebnis.

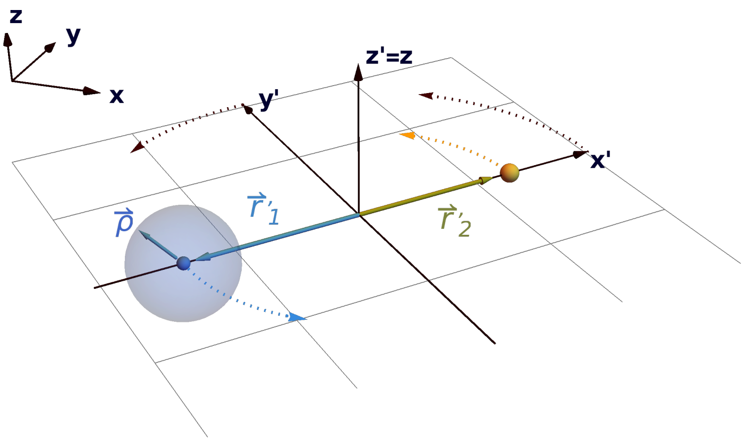

Abbildung 1: Erde-Gestirn-System (Gestirn = Mond oder Sonne). Zu Illustrationszwecken wurden keine realistischen Massstäbe verwendet.

3. Zweiatomiges Molekül - Teil 2 (35 Punkte)

Die Herangehensweise an ein Zweikörperproblem (Kapitel 3.2.1, 3.2.2) soll vertieft werden.

(a) Wir betrachten ein zweiatomiges Molekül bestehend aus den Massen m_1 und m_2. Ein Potential $V(|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|)$ binde die beiden Massen. Diskutieren Sie die Bewegungsgleichungen der Relativ- und Schwerpunkskoordinate.

(b) Diskutieren Sie, warum für dieses Problem der Drehimpuls erhalten ist. Was lässt sich daraus ableiten?

(c) Zeigen Sie dass die Winkelgeschwindigkeit gegeben ist durch $\dot{\varphi} = L/mr^2$ und drücken Sie damit das verbleibende Problem einzig in der radialen Koordinate $r = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$ aus.

(d) Die Bindungsenergie zweier Atome wird oft durch das Lennard-Jones Potential

$$V_{\mathrm{LJ}}(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right] \tag{9}$$

beschrieben, welches eine kurzreichweitige Abstossung und eine langreichweitige Anziehung beschreibt. Zeigen Sie, dass das Lennard-Jones Potential ein Minimum besitzt und dort durch ein harmonisches Potential $V(r) = V_0 + k(r - \ell_0)^2/2$ approximiert werden; Bestimmen Sie die Parameter V_0, k, und ℓ_0 und skizzieren Sie beide Potentiale.

(e) Für das harmonische Potential $V(r) = V_0 + k(r - \ell_0)^2/2$, wie verhalten sich der Gleichgewichtsabstand $\tilde{\ell}_0(L)$ und die Steifigkeit $\tilde{k}(L)$ im Radialproblem des zweiatomigen Moleküls wenn dieses einen Drehimpuls L besitzt. Diskutieren Sie hier **nur** die Fälle kleiner ($L \ll L_0$) und grosser Drehimpulse ($L \gg L_0$); welches ist die relevante Vergleichsgrösse L_0 im Problem?