

Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian

Blatt 12

M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Lösungsvorschlag

1. Drehmatrizen Teil 2

(25 Punkte)

(a) Durch komponentenweises Ableiten findet man

$$J_x = \left. \frac{dR_x}{d\alpha} \right|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \left. \frac{dR_y}{d\alpha} \right|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \left. \frac{dR_z}{d\alpha} \right|_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Aus der Definition des Kommutators erfolgt sofort, dass $[J_i, J_j] = -[J_j, J_i]$ und somit insbesondere $[J_i, J_i] = 0$ gilt. Es genügt also zu zeigen, dass $[J_i, J_j] = J_k$, für $(i, j, k) = (x, y, z)$ und ebenso für zyklische Permutationen. Wir finden

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_z \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_x \\ & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_y \end{aligned}$$

Weiter finden wir

$$J_x^2 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J_y^2 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J_z^2 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

(c) Zur Berechnung von $\exp(\alpha J_i)$ (hier für $i = z$) nutzen wir $(J_z)^3 = -J_z$ und finden

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha J_z)^n}{n!} = \mathbb{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} (J_z)^{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} (J_z)^{2k} \quad (2)$$

$$= \mathbb{1} + J_z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k - (J_z)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \quad (3)$$

$$= [\mathbb{1} + (J_z)^2] + \sin(\alpha) J_z - \cos(\alpha) (J_z)^2 = R_z(\alpha) \quad (4)$$

(d) Wir schreiben $R_\omega = \exp(\omega J_z t)$ und es lässt sich leicht zeigen, dass für die Zeitableitung gilt: $\dot{R}_\omega = \omega J_z \exp(\omega J_z t)$. **Achtung:** Diese Beziehung ist immer noch als Matrix-Produkt zwischen J_z und dem Matrixexponential zu verstehen. Wir finden

$$R_\omega \dot{R}_\omega = e^{\omega J_z t} (\omega J_z) e^{\omega J_z t} = (\omega J_z) e^{\omega J_z t} e^{\omega J_z t} = (\omega J_z) e^{2\omega J_z t} = (\omega J_z) R_{2\omega} = \dot{R}_{2\omega}/2 \quad (5)$$

$$R_\omega^T \dot{R}_\omega = e^{\omega (J_z)^T t} (\omega J_z) e^{\omega J_z t} = e^{-\omega J_z t} (\omega J_z) e^{\omega J_z t} = (\omega J_z) e^{-\omega J_z t} e^{\omega J_z t} = \omega J_z \quad (6)$$

$$(\dot{R}_\omega)^T \dot{R}_\omega = [(\omega J_z) e^{\omega J_z t}]^T (\omega J_z) e^{\omega J_z t} = e^{-\omega J_z t} (-\omega J_z) (\omega J_z) e^{\omega J_z t} = -(\omega J_z)^2 \quad (7)$$

allem wenn man den letzten Term direkt mit dem Term $\propto Gmm_2\rho^2/r_0^3$ vergleicht. Insbesondere würde man vermuten, dass für $m_1/m_2 \gg 1$ der vernachlässigte Term durchaus wichtig sein sollte. Es stellt sich aber heraus, dass dieser Term tatsächlich keinen nennenswerten Einfluss auf die Modulation der Meeresoberfläche hat. Der Vollständigkeit halber wird der Term im folgenden in **rot** mitgeführt. Die Terme $\propto \cos(\varphi)$ heben sich gegenseitig auf und wir finden die gewünschte Beziehung.

- (e) Entwickelt man das Potential in $\delta\rho$ findet man

$$\frac{-3m_2\rho_1^2}{2r_0^3}\cos^2(\varphi) + \delta\rho\left[\frac{m_1}{\rho_1^2} - \frac{m_1}{\rho_1^2}\frac{\rho_1^3}{r_0^3} - \frac{3m_2\rho_1}{r_0^3}\cos^2(\varphi)\right] = \text{const} \quad (13)$$

Die Vermutung $\delta\rho \sim \cos(2\varphi)$ veranlasst uns anzunehmen, dass der mittlere Abstand ρ_1 bei $\varphi = \pi/4$ realisiert wird. Dort gilt dann $\delta\rho(\pi/4) = 0$ und die Konstante auf der rechten Seite nimmt den Wert $-3m_2\rho_1^2\cos^2(\pi/4)/2r_0^3$ an. Alternativ kann man obige Entwicklung auch um den minimalen Abstand $\rho_{\min}$ bei $\varphi = \pi/2$ verstehen wobei wir nun $\delta\rho_{\min}(\pi/2) = 0$ fordern müssen. Dann verschwindet die Konstante auf der rechten Seite. Im ersten Fall erhält man für die Äquipotentialline die Beziehung

$$\delta\rho(\varphi) = \rho_1 \frac{3m_2\rho_1^3\cos(2\varphi)}{2[m_1r_0^3 - m_1\rho_1^3 - 3m_2\rho_1^3\cos^2(\varphi)]} \approx \rho_1 \frac{3m_2\rho_1^3}{2m_1r_0^3}\cos(2\varphi). \quad (14)$$

Im zweiten Fall gilt

$$\delta\rho_{\min}(\varphi) = \rho_{\min} \frac{3m_2\rho_{\min}^3\cos^2(\varphi)}{2[m_1r_0^3 - m_1\rho_{\min}^3 - 3m_2\rho_{\min}^3\cos^2(\varphi)]} \approx \rho_{\min} \frac{3m_2\rho_{\min}^3}{2m_1r_0^3}\cos^2(\varphi). \quad (15)$$

Im letzten Schritt wurde jeweils angenommen, dass $\kappa = (m_2\rho_1^3/m_1r_0^3)$ klein ist. Interessanterweise kann die Grösse κ als das Verhältnis zweier Dichten interpretiert werden: Erstens, die Dichte $m_2/(4\pi r_0^3/3)$ welche daraus resultiert die Masse m_2 auf die Sphäre mit Radius r_0 zu verdünnen und zweitens die Dichte von Körper 1, d.h. $m_1/(4\pi\rho_1^3/3)$.

- (f) Wir finden für das Erd-Mond-Paar $\kappa = 5 \times 10^{-8}$ und für das Erd-Sonne-Paar $\kappa = 2 \times 10^{-8}$, also vergleichsweise ähnliche Werte, und dies obwohl die Längen- und Massenskalen um Größenordnungen verschieden sind. Die maximale Gezeitenstärke $\delta\rho(0) = 0.5\text{m}$ und 0.2m ist für beide Fälle dementsprechend ähnlich.

3. Zweiatomiges Molekül - Teil 2

(35 Punkte)

- (a) Da das Potential nur vom Abstand zwischen den beiden Massenpunkten abhängt gilt, dass der Schwerpunkt $\mathbf{R} = (m_1/M)\mathbf{r}_1 + (m_2/M)\mathbf{r}_2$ ($M = m_1 + m_2$) sich kräftefrei bewegt, d.h. $\ddot{\mathbf{R}} = 0$. Die Relativkoordinate $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ genügt der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(|\mathbf{r}|) \quad (16)$$

mit $m = (m_1^{-1} + m_2^{-1})^{-1}$ der reduzierten Masse.

- (b) Der Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ist erhalten weil die Kraft nur entlang der Verbindungslinie $\mathbf{r}$ wirkt. Dies ist so weil das Potential nicht von der Richtung von $\mathbf{r}$ sondern nur von dessen Betrag abhängt. Für den Drehimpuls gilt $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$. Daraus folgt sofort, dass sich die Bewegung auf eine Ebene beschränkt. Wir schreiben $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$, $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$, und $\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi$

- (c) Wegen der Impulserhaltung gilt, dass der Kraftterm entlang e_φ verschwinden muss. Daraus folgt, dass $r^2\dot{\varphi} = \text{const}$ und wir finden nach kurzer Umformung $m r^2 \dot{\varphi} = L$. Daraufhin folgt

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -\partial_r V(r) \quad (17)$$

- (d) Das Minimum des Lennard-Jones Potential liegt bei $\ell_0 = 2^{1/6}\sigma$ und dessen Tiefe ist $V_{\text{LJ}}(\ell_0) = -\varepsilon$. Die Krümmung ermittelt sich aus $V''_{\text{LJ}}(\ell_0) = 36 \cdot 2^{2/3}(\varepsilon/\sigma^2) = 72\varepsilon/\ell_0^2$.

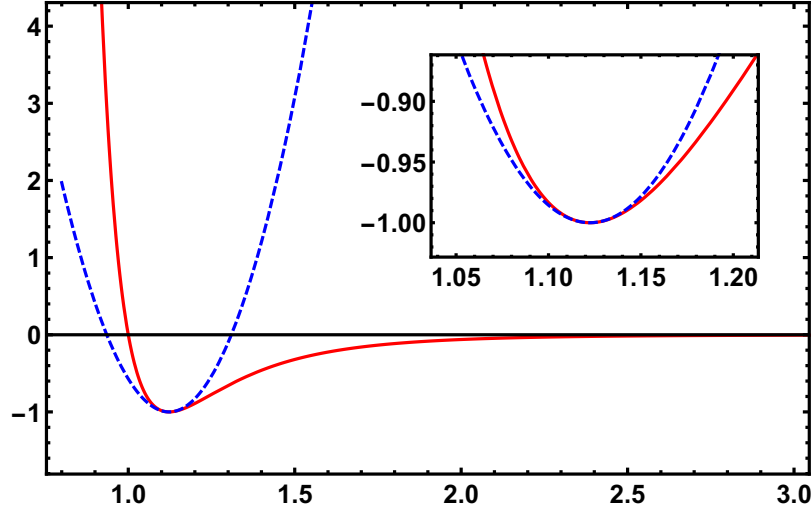


Abbildung 2: Lennard-Jones Potential (rot) und harmonische Näherung (blau). Die Näherung bricht zusammen weil das Potential sehr hohe Potenzen enthält. $\sigma = \varepsilon = 1$.

- (e) Aus Dimensionsbetrachtung, oder durch geschicktes hinschauen folgt aus der Kraft

$$F = \frac{L^2}{mr^3} - k(r - \ell_0) \quad (18)$$

dass die Vergleichsgröße für den Drehimpuls $L_0 = \ell_0^2 \sqrt{km}$ ist (bis auf numerische). Für $L \ll L_0$ finden wir dass das Potentialminimum nach $\tilde{\ell}_0 = [1 + (L/L_0)^2]\ell_0$ verschoben wird und die Krümmung verändert sich zu $\tilde{k} = [1 + 3(L/L_0)^2]k$. Für $L \gg L_0$ gilt $\tilde{\ell}_0 = \ell_0 \sqrt{L/L_0}$ und $\tilde{k} = 4k$.