Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian
M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Blatt 13
Abgabe 29.01.2019

Infobox: Anmeldung Klausur
Die Anmeldung zur Klausur (13.02.19, 10-12 Uhr) wird im Campus System (campus.studium.kit.edu) am Montag, dem 04.02.19 um 12:00 Uhr freigeschaltet, und bleibt bis am Montag, den 11.02.19 um 23:59 Uhr geöffnet.
Die (Wieder-)Abmeldung von der Klausur ist ebenfalls nur bis zum 11.02.19 um 23:59 Uhr möglich. Die Hörsaal-Einteilung wird am 12.02.19 auf dem ILIAS-System bekannt gegeben. Es werden zur Klausur keine Hilfsmittel erlaubt sein.

Auf diesem Übungsblatt werden 50 reguläre Punkte vergeben, und obendrauf noch 50 Bonuspunkte!

1. Rotierender Vektor konstanter Länge (10 Punkte)
Zeigen Sie, dass für die zeitliche Änderung eines Vektors $\boldsymbol{b}$ konstanter Länge, der um eine raumfeste Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ rotiert, folgende Gleichung gilt

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{b}\,. \tag{1}$$

Die Richtung des hier auftretende Vektor $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t)\,\hat{e}_\omega$ ist parallel zur Rotationsachse, und sei so gewählt, dass der Winkel zwischen $\boldsymbol{\omega}$ und $\boldsymbol{b}$ spitz ist.

2. Drehimpuls (20 Punkte)
Ein Massenpunkt bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf der Innenseite eines auf der Spitze stehenden Kegels mit Öffnungswinkel α. Seine Bahnkurve verlaufe in einer horizontalen Ebene, die den Abstand d zur Kegelspitze besitzt. Der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ bezüglich der Spitze des Kegels, und dessen zeitliche Ableitung $\dot{\boldsymbol{L}}$ sollen nun auf zwei Arten berechnet werden:

(a) Verwenden Sie lediglich, dass gilt $r = |\boldsymbol{r}| = const$ und $\omega = const$. Welche Komponenten des Drehimpulses sind erhalten ?
Tipp : Die Graßmann-Identität lautet $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$.

(b) Verwenden Sie $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$, und parametrisieren Sie die Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ explizit.

3. Scheinkräfte (70 Punkte)
Wechselt man aus einem Inertialsystem (mit $\boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y, \boldsymbol{e}_Z$) in ein beschleunigtes Koordinatensystem (KS mit $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$), welches um einen Vektor $\boldsymbol{P}(t)$ verschoben ist und welches sich zusätzlich um eine Achse $\boldsymbol{\omega}$ rotieren kann, so müssen Newton‘s Bewegungsgleichungen in KS um sogenannte Scheinkräfte erweitert werden. Konkret lauten diese

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_t + \boldsymbol{F}_z + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_a\,,$$

wobei definiert sind

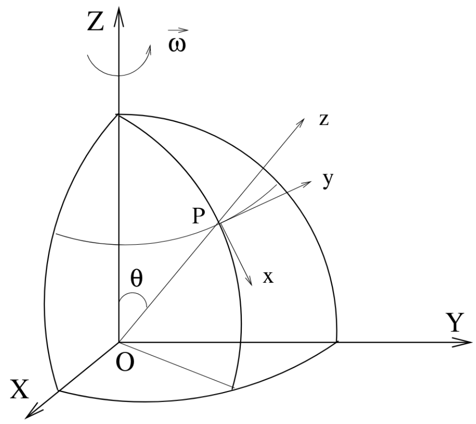
$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}_t = -m\,\ddot{\boldsymbol{P}} \quad \text{(Translationskraft)}, && \boldsymbol{F}_z = -m\,\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \quad \text{(Zentrifugalkraft)},\\ &\boldsymbol{F}_c = -2m\,\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} \quad \text{(Corioliskraft)}, && \boldsymbol{F}_a = -m\,\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} \quad \text{(Azimutalkraft)}. \end{aligned}$$

Hierbei beziehen sich die Koordinaten $\boldsymbol{r}$ auf das System KS, wohingegen $\boldsymbol{P}$ im Inertialsystem[1] angegeben ist, siehe Skizze.

(a) Nutzen Sie die transformierte kinetische Energie T' [Gleichung (7) aus Aufgabenblatt 12], um mittels des Lagrange-Formalismus das Zustandekommen der Kräfte $\boldsymbol{F}_z$, $\boldsymbol{F}_c$ und $\boldsymbol{F}_a$ zu beweisen.
Tipp : Die Lagrange-Identität lautet $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})$. Im Spatprodukt $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \ldots$ darf zyklisch vertauscht werden.

[1] In der Praxis wird $\boldsymbol{P}$ in der ursprünglichen Basis definiert, und wird anschließend in die neue Basis umgeschrieben.

Ein kleiner Stein (Masse m) soll aus einem hohen Gebäude, z.B. Karlsruher Physikhochhaus, (mit Höhe $h \ll R$, Erdradius R, und Polarwinkel θ vom Nordpol) fallen gelassen werden. Der Luftwiderstand soll vernachlässigt werden. Die Bewegung des Steins soll im Koordinatensystem $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$, siehe Skizze, beschrieben werden. Dabei soll der Einfachheit halber angenommen werden, dass die Gewichtskraft konstant ist, und zu jedem Zeitpunkt in die -$\boldsymbol{e}_z$-Richtung zeigt, also $\boldsymbol{F}_G = -mg\,\boldsymbol{e}_z$.



(b) Zeigen Sie, dass für den Stein die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = 2\,\omega\,\dot{y}\,\cos\theta + \omega^2\,\cos\theta\,[R_\perp + x\,\cos\theta + z\,\sin\theta] \tag{2}$$

$$\ddot{y} = -\,2\,\omega\,[\dot{x}\cos\theta + \dot{z}\sin\theta] + \omega^2\,y \tag{3}$$

$$\ddot{z} = -g + 2\,\omega\,\dot{y}\,\sin\theta + \omega^2\,\sin\theta\,[R_\perp + x\,\cos\theta + z\,\sin\theta] \tag{4}$$

gelten, wobei $R_\perp = R\sin\theta$.
Tipp : (i) Drücken Sie die Achse $\boldsymbol{\omega}$ (mit $\omega = const$) in den Koordinaten $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ aus. (ii) Drücken Sie den Translationsvektor $\boldsymbol{P}$ (sowie $\ddot{\boldsymbol{P}}$) in Kugelkoordinaten aus, und machen Sie sich klar, dass gilt $\boldsymbol{e}_r \hat{=} \boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{e}_\varphi \hat{=} \boldsymbol{e}_y$ und $\boldsymbol{e}_\theta \hat{=} \boldsymbol{e}_x$.

Da $R \gg x, z$ werden im Folgenden in Gleichungen (2) und (4) die x, z-Terme in den eckigen Klammern gegenüber dem R-Term vernachlässigt.

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen (2)-(4), d.h. finden Sie $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ für die Anfangsbedingungen $\boldsymbol{r}(0) = (0, 0, h)^T$ und $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = (0, 0, 0)^T$.
Tipp : Nach Ableiten einer Gleichung lassen sich die anderen beiden einsetzen um das Gleichungssystem zu entkoppeln. Die neue DGL lässt sich für eine neue Variable $\tilde{\eta} = \dot{\eta}$ (η beliebig) lösen. Überlegen Sie sich, wie die Anfangsbedingugen für $\tilde{\eta}$ aussehen.

(d) Die charakteristische Fallzeit lautet $\tau = \sqrt{2h/g}$. Zeigen Sie explizit durch Einsetzen von realistischen Werten, dass auf der Erde gilt $\omega\tau \ll 1$ und $\tilde{\omega} = \omega\sqrt{R/g} \ll 1$.

(e) Entwickeln Sie die Lösung $\boldsymbol{r}(t)$ für $\omega t \ll 1$ bis einschließlich der Ordnung $\mathcal{O}(t^4)$. Drücken Sie das Ergebnis durch die dimensionslosen Größen $\tilde{\omega}$ und $\tilde{t} = t/\tau$ aus, und behalten Sie nur die jeweils führenden Terme.

(f) Zum Zeitpunkt t_f trifft der Stein auf den Boden. Zeigen Sie, dass der Auftreffpunkt auf dem Boden durch die Koordinaten

$$x(t_f) = h\,\tilde{\omega}^2\,\sin\theta\cos\theta\;, \qquad y(t_f) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,h\,\sqrt{\frac{h}{R}}\,\tilde{\omega}\,\sin\theta \tag{5}$$

gegeben ist. Welche Ablenkung wurde durch welche Scheinkraft hervorgerufen ?

(*) Wie groß ist die x, y-Ablenkung für einen Stein, den Sie vom Karlsruher ($\theta = 41°$) Physikhochhaus ($h = 100m$) fallen lassen ?