

Klassische Theoretische Physik I WS 2018/2019

Prof. Dr. J. Schmalian

M. Hecker, E. Kiselev und Dr. R. Willa

Blatt 13

Lösungsvorschlag

1. Rotierender Vektor konstanter Länge

(10 Punkte)

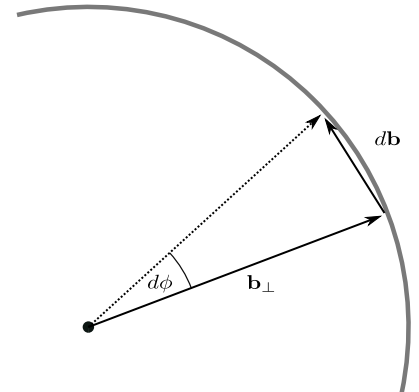
Zerlegen wir zunächst den Vektor $\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}$ in Anteile $\mathbf{b}_{\parallel} \parallel \boldsymbol{\omega}$ und $\mathbf{b}_{\perp} \perp \boldsymbol{\omega}$, so gilt

$$\dot{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{b} = \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{b}_{\perp}. \quad (1)$$

Wir lesen also ab, dass $\dot{\mathbf{b}}$ sowohl senkrecht auf $\mathbf{b}_{\perp}$ als auch auf $\boldsymbol{\omega}$ steht. Aus der Sicht der Rotationsachse ergibt sich also ein Bild wie in der Skizze gezeigt, mit $d\mathbf{b}$ einer infinitesimalen Änderung, bei der sich der Vektor um den Winkel $d\phi$ gedreht hat. Offenbar gilt für die Beträge

$$db = b_{\perp} \tan(d\phi) \approx b_{\perp} d\phi$$

und damit
$$\frac{db}{dt} = b_{\perp} \frac{d\phi}{dt} = b_{\perp} \omega = |\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{b}_{\perp}| = |\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{b}|.$$



Für die Beträge ist (1) bereits erfüllt. Anhand der Skizze können wir direkt ablesen dass $\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{b}$ ebenfalls die Richtung für $\frac{d\mathbf{b}}{dt}$ liefert. Damit ist die Gleichung (1) gezeigt.

2. Drehimpuls

(10 + 10 = 20 Punkte)

Ein Massenpunkt bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf der Innen-seite eines auf der Spitze stehenden Kegels mit Öffnungswinkel α . Seine Bahnkurve verlaufe in einer horizontalen Ebene, die den Abstand d zur Kegelspitze besitzt. Der Drehimpuls $\mathbf{L}$ bezüglich der Spitze des Kegels, und dessen zeitliche Ableitung $\dot{\mathbf{L}}$ sollen nun auf zwei Arten berechnet werden:

- (a) Für einen rotierenden Vektor konstanter Länge $\mathbf{r}$ ist die zeitliche Änderung (nach Gleichung (1)) gegeben durch $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Damit ergibt sich für den gesuchten Drehimpuls

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (m\dot{\mathbf{r}}) = m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m [\mathbf{r}^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}], \quad (2)$$

wobei wir die Identität $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ verwendet haben. Für die Ableitung ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= m [2(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \boldsymbol{\omega} - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \dot{\mathbf{r}}] \\ &= m \left[\underbrace{2(\mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}))}_0 \boldsymbol{\omega} - \underbrace{((\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}}_0 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right] \\ &= -m(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3)$$

Somit ist die Ableitung des Drehimpulses $\dot{\mathbf{L}}$ nur senkrecht zu $\boldsymbol{\omega}$ endlich. Im Umkehrschluss heißt das, die Ableitung $\dot{\mathbf{L}}_{\parallel}$ parallel zu $\boldsymbol{\omega}$ ist null, und somit ist die Komponente $\mathbf{L}_{\parallel}$ des Drehimpulses erhalten.

- (b) Mit $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ parametrisieren wir die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ (und berechnen deren Ableitung $\dot{\mathbf{r}}(t)$) als

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \\ d \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = R\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t), \quad (4)$$

mit $R = d \tan(\alpha)$. Damit berechnen wir den Drehimpuls (und dessen Ableitung)

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = mR\omega \begin{pmatrix} -d \cos(\omega t) \\ -d \sin(\omega t) \\ R \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{L}} = mRd\omega^2 \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wie zu erwarten war, ist nun die $L_z = mR^2\omega$ Komponente erhalten. Wer sich von der Gültigkeit von (2) und (3) explizit überzeugen möchte, kann problemlos (4) darin einsetzen.

3. Scheinkräfte

(10 + 15 + 25 + 3 + 10 + 7 = 70 Punkte)

- (a) Wir nutzen die transformierte kinetische Energie T' [Gleichung (7) Blatt 12] (das gestrichelte Koordinatensystem aus Aufgabe 2 Blatt 12 entspricht unserem ungestrichelten System hier)

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + m \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) + \frac{m}{2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 \\ &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + m \underbrace{\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega})}_{\dot{\mathbf{r}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})} + \frac{m}{2} [\omega^2 \mathbf{r}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})], \end{aligned}$$

wobei wir die zyklische Vertauschung des Spatprodukts ausgenutzt haben, und die Identität $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$ angewendet. Die Umschreibung erleichtert die Ableitung nach $\mathbf{r}$ bzw $\dot{\mathbf{r}}$ im Folgenden. Für die Lagrange Funktion gilt $L = T - V$, wobei wir annehmen, dass $V = V(\mathbf{r})$ nur vom Ort abhängt. Erinnerung, es gilt $\mathbf{F} = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}$ (Hier steht $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ für den Nabla-Operator.). Mit der Lagrange-Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{d}{dt} [m \dot{\mathbf{r}} + m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] &= \mathbf{F} + m \dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega} + m \underbrace{[\omega^2 \mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega}]}_{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega}} \\ m \ddot{\mathbf{r}} &= \underbrace{\mathbf{F}}_{\mathbf{F}_c} - \underbrace{2m \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}}_{\mathbf{F}_a} - \underbrace{m \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\mathbf{F}_z}, \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Gleichung die Identität $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$ ausgenutzt haben. Da in Aufgabe 2 aus Blatt 12 keine Translation des Koordinatensystem unternommen wurde, kann aus dieser Rechnung die Kraft $\mathbf{F}_t$ nicht resultieren.

- (b) Zunächst halten wir fest, dass die Azimutalkraft $\mathbf{F}_a = 0$ verschwinden muss, da $\omega = \text{const.}$ Es lässt sich schnell verifizieren, dass gilt $\boldsymbol{\omega} = \omega(-\sin \theta, 0, \cos \theta)$ im Koordinatensystem $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. Damit lässt sich berechnen

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \omega \begin{pmatrix} -\dot{y} \cos \theta \\ \dot{x} \cos \theta + \dot{z} \sin \theta \\ -\dot{y} \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 \begin{pmatrix} x \cos^2 \theta + z \sin \theta \cos \theta \\ y \\ x \sin \theta \cos \theta + z \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

womit sich die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft direkt angeben lassen. (Der eigentlich dominierende Anteil zur Zentrifugalkraft durch den rotierenden Vektor $\mathbf{P}$ wird weiter unten hinzugefügt.) Die wirkende Kraft ist die Gewichtskraft $\mathbf{F} = \mathbf{F}_G = -mg \mathbf{e}_z$, die wir als einzig in die $-\mathbf{e}_z$ -Richtung zeigend annehmen. Dies ist genau genommen nur wahr, solange sich der Stein auf der $\mathbf{e}_z$ Achse befindet. Sobald x oder y endlich sind, hat $\mathbf{F}_G$ auch Komponenten in jene Richtungen. Dieser Effekt ist von der Größenordnung $\{x, y\}/R$, und damit bei Ablenkungen im Zentimeter Bereich bei ca 10^{-8} , und kann für die Aufgabe vernachlässigt werden.

Es fehlt noch die Translationkraft. Dazu drücken wir $\mathbf{P} = P \mathbf{e}_r$ in Kugelkoordinaten

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

aus, und nutzen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta &= -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_\theta. \end{aligned}$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= P \mathbf{e}_r, \\ \dot{\mathbf{P}} &= \dot{P} \mathbf{e}_r + P \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + P \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi, \\ \ddot{\mathbf{P}} &= \left(\ddot{P} - P \dot{\theta}^2 - P \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) \mathbf{e}_r + \left(P \ddot{\theta} + 2 \dot{P} \dot{\theta} - P \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left(P \ddot{\varphi} \sin \theta + 2 \dot{P} \dot{\varphi} \sin \theta + 2 P \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \right) \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Nutzen wir nun aus, dass $P = R = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ und $\varphi = \omega t$ mit $\omega = \text{const}$, so vereinfacht sich (5) zu

$$\ddot{\mathbf{P}} = -R\omega^2 \sin^2 \theta \mathbf{e}_r - R\omega^2 \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_\theta.$$

Bei genauem Hinschauen erkennen wir, dass gilt $\mathbf{e}_r \hat{=} \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_\varphi \hat{=} \mathbf{e}_y$ und $\mathbf{e}_\theta \hat{=} \mathbf{e}_x$, und somit

$$\ddot{\mathbf{P}} = -R_\perp \omega^2 \sin \theta \mathbf{e}_z - R_\perp \omega^2 \cos \theta \mathbf{e}_x,$$

mit $R_\perp = R \sin \theta$. Nun können wir alles zusammenfügen

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{P}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}},$$

und erhalten die Gleichungen

$$\ddot{x} = 2\omega \dot{y} \cos \theta + \omega^2 \cos \theta [R_\perp + x \cos \theta + z \sin \theta] \quad (6)$$

$$\ddot{y} = -2\omega [\dot{x} \cos \theta + \dot{z} \sin \theta] + \omega^2 y \quad (7)$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega \dot{y} \sin \theta + \omega^2 \sin \theta [R_\perp + x \cos \theta + z \sin \theta] \quad (8)$$

- (c) Wie angegeben vernachlässigen wir die $x \cos \theta$ und $z \sin \theta$ Terme in den eckigen Klammern. Um die Bewegungsgleichungen zu entkoppeln, leiten wir (7) nach der Zeit ab, und setzen schließlich (6) und (8) ein,

$$\ddot{y} = -2\omega [\ddot{x} \cos \theta + \ddot{z} \sin \theta] + \omega^2 \dot{y}$$

$$\ddot{y} = -2\omega [(2\omega \dot{y} \cos \theta + \omega^2 R_\perp \cos \theta) \cos \theta + (-g + 2\omega \dot{y} \sin \theta + \omega^2 R_\perp \sin \theta) \sin \theta] + \omega^2 \dot{y}$$

$$\ddot{y} = 2\omega g \sin \theta - \dot{y} (4 - 1)\omega^2 - 2\omega^3 R_\perp.$$

Führen wir nun die Variable $\tilde{y} = \dot{y}$ ein, sowie $\tilde{g} = g - \omega^2 R = g(1 - \tilde{\omega}^2)$ und $a^2 \equiv 4 - 1 = 3$ (wir verwenden im Folgenden weiterhin a , um später zu zeigen, dass die führenden Terme nicht davon abhängen, ob man den $\omega^2 y$ Term in (7) mitgenommen hat.), so vereinfacht sich die Gleichung zu einem harmonischen Oszillator

$$\ddot{\tilde{y}} + a^2 \omega^2 \tilde{y} = 2\omega \tilde{g} \sin \theta .$$

Diesen lösen wir mit

$$\tilde{y} = A \sin(a\omega t) + B \cos(a\omega t) + \frac{2\tilde{g} \sin \theta}{a^2 \omega} ,$$

wobei wir die partikuläre Lösung mit dem Ansatz $\tilde{y}_p = C = \text{const}$ bestimmt haben. Für die Anfangsbedingungen gilt $\tilde{y}(0) = \dot{y}(0) = 0$ und $\dot{\tilde{y}}(0) = \ddot{y}(0) = 0$, wobei wir die letzte Gleichung mit (7) berechnet haben. Aus $\dot{\tilde{y}}(0) = 0$ folgt sofort $A = 0$, und aus $\tilde{y}(0) = 0$ folgt dann $B = -2\tilde{g} \sin \theta / a^2 \omega$. Damit lautet die Lösung

$$\tilde{y}(t) = \dot{y}(t) = \frac{2\tilde{g} \sin \theta}{a^2 \omega} [1 - \cos(a\omega t)] ,$$

und schließlich

$$y(t) = \frac{2\tilde{g} \sin \theta}{a^2 \omega} \left[t - \frac{1}{a\omega} \sin(a\omega t) \right] \quad (9)$$

mit $y(0) = 0$ wie gefordert.

Nun können wir sowohl $x(t)$ als auch $z(t)$ bestimmen. Mit (6) finden wir

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{4\tilde{g} \sin \theta}{a^2} \cos \theta [1 - \cos(a\omega t)] + \omega^2 R_{\perp} \cos \theta \\ \dot{x} &= \frac{4\tilde{g} \sin \theta}{a^2} \cos \theta \left[t - \frac{1}{a\omega} \sin(a\omega t) \right] + \omega^2 R_{\perp} t \cos \theta \\ x(t) &= \frac{4\tilde{g} \sin \theta}{a^2} \cos \theta \left[\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{a^2 \omega^2} [\cos(a\omega t) - 1] \right] + \frac{1}{2} \omega^2 R_{\perp} t^2 \cos \theta , \end{aligned} \quad (10)$$

wobei wir direkt die Anfangsbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ eingeflochten haben. Mit (8) finden wir für $z(t)$,

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -g + \frac{4\tilde{g}}{a^2} \sin^2 \theta [1 - \cos(a\omega t)] + \omega^2 R_{\perp} \sin \theta \\ \dot{z} &= -gt + \frac{4\tilde{g}}{a^2} \sin^2 \theta \left[t - \frac{1}{a\omega} \sin(a\omega t) \right] + \omega^2 R_{\perp} t \sin \theta \\ z(t) &= h - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{4\tilde{g}}{a^2} \sin^2 \theta \left[\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{a^2 \omega^2} [\cos(a\omega t) - 1] \right] + \frac{1}{2} \omega^2 R_{\perp} t^2 \sin \theta , \end{aligned} \quad (11)$$

mit den eingearbeiteten Anfangsbedingungen $\dot{z}(0) = 0$ und $z(0) = h$.

- (d) Die charakteristische Fallzeit lautet $\tau = \sqrt{2h/g}$. In dieser (maximalen) Zeit nimmt das Produkt den Wert $\omega \tau \approx \frac{2\pi}{\text{day}} \sqrt{\frac{1000m}{g}} \approx 10^{-3} \ll 1$ (für eine Höhe von $h = 500m$) an. Für die dimensionslose Frequenz findet man $\tilde{\omega} = \omega \sqrt{R/g} \approx 0.06 \ll 1$.
- (e) Entwickeln wir nun die Lösung $\mathbf{r}(t)$, d.h. (10), (9) und (11), für $\omega t \ll 1$ bis zur

Ordnung $\mathcal{O}(t^4)$, und führen schließlich $\tilde{\omega}$ und $\tilde{t} = t/\tau$ ein, so ergibt sich

$$x(t) \approx \frac{4\tilde{g} \sin \theta}{a^2} \cos \theta \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{a^2\omega^2} \left[-\frac{1}{2}(a\omega t)^2 + \frac{1}{24}(a\omega t)^4 \right] \right] + \frac{1}{2}\omega^2 R_{\perp} t^2 \cos \theta \quad (12)$$

$$= \frac{1}{6} \tilde{g} \sin \theta \cos \theta \omega^2 t^4 + \frac{1}{2} R_{\perp} \omega^2 t^2 \cos \theta$$

$$= \frac{1}{2} R \omega^2 t^2 \sin \theta \cos \theta \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\tilde{g} t^2}{R} \right) \quad (13)$$

$$= h \tilde{\omega}^2 \tilde{t}^2 \sin \theta \cos \theta \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h}{R} (1 - \tilde{\omega}^2) \tilde{t}^2 \right) \quad (14)$$

$$\approx h \tilde{\omega}^2 \tilde{t}^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (15)$$

$$y(t) \approx \frac{2\tilde{g} \sin \theta}{a^2\omega} \left[t - \frac{1}{a\omega} (a\omega t - \frac{1}{6}(a\omega t)^3) \right]$$

$$= \frac{\tilde{g} \sin \theta}{3} \omega t^3 \quad (16)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} h \sqrt{\frac{h}{R}} \tilde{\omega} \tilde{t}^3 \sin \theta,$$

$$z(t) \approx h - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{4\tilde{g}}{a^2} \sin^2 \theta \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{a^2\omega^2} \left[-\frac{1}{2}(a\omega t)^2 + \frac{1}{24}(a\omega t)^4 \right] \right] + \frac{1}{2}\omega^2 R_{\perp} t^2 \sin \theta \quad (17)$$

$$= h - \frac{1}{2}gt^2 + \tilde{g} \frac{1}{6} \omega^2 t^4 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \omega^2 R t^2 \sin^2 \theta \quad (18)$$

$$= h - h \tilde{t}^2 \left(1 - \tilde{\omega}^2 \sin^2 \theta - \frac{2}{3} \frac{h}{R} \tilde{\omega}^2 \tilde{t}^2 \sin^2 \theta \right) \quad (19)$$

$$z(t) \approx h - h \tilde{t}^2. \quad (20)$$

In den jeweils letzten Zeilen haben wir die Näherungen $\tilde{\omega} \ll 1$ und $h/R \ll 1$ angewendet. Bedenke dass $\tilde{g} = g(1 - \tilde{\omega}^2) \approx g$.

(f) Für die Fallzeit ($z(t_f) = 0$) finden wir

$$z(t_f) = 0 = h - h \tilde{t}_f^2 \quad \rightarrow \tilde{t}_f = 1,$$

d.h. in erster Näherung gilt weiterhin $t_f = \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Die Position des Auftreffpunkts lautet damit

$$x(t_f) = h \tilde{\omega}^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (21)$$

$$y(t_f) = \frac{2\sqrt{2}}{3} h \sqrt{\frac{h}{R}} \tilde{\omega} \sin \theta. \quad (22)$$

Es lässt sich schnell zurückverfolgen, dass die x -Ablenkung durch die Zentrifugalkraft verursacht wurde (der dominierende Term in x ist der letzte in (12), welcher von der Zentrifugalkraft stammt.), und die y -Ablenkung durch die Corioliskraft (y ist linear in ω und kann daher nur von der Corioliskraft herrühren).

(*) Für die Ablenkungen berechnet man $x \approx 15,7 \text{ cm}$ und $y \approx 1,4 \text{ cm}$. In Abbildung 1 haben wir diese Ablenkungen als Funktion der Abwurfhöhe für das Karlsruher Physikhochau geplottet.

Insight: Wüsste man nicht auf welchem Breitengrad der Erde man sich befindet, könnte man durch dieses 'simple' Experiment sowohl den Winkel θ , als auch den Erdradius R bestimmen.

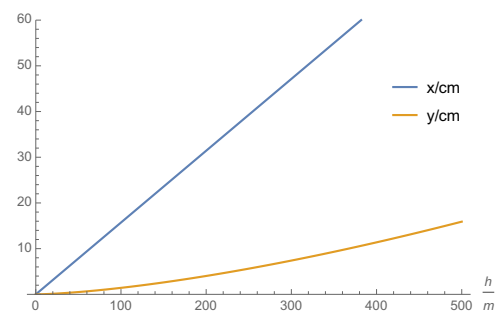


Abbildung 1: Ablenkung in x und y Richtung als Funktion der Abwurfhöhe h nach Gleichungen (21) und (22). Gewählt wurde $\theta = 41^\circ$, was ungefähr Karlsruhe entspricht.