

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 19/20

Prof. Dr. A. Shnirman

Blatt 0

PD Dr. B. Narozhny

Lösungsvorschlag

1. Skalar- und Vektorprodukte:

Für zwei Vektoren, $\mathbf{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ und $\mathbf{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, definieren wir die Skalar- und Vektorprodukte als

$$\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1), \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, und $\mathbf{e}_3$ die Einheitsvektoren der drei Koordinatenachsen sind.

(a) Für die gegebene Vektorpaare erhalten wir:

- $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$

das Skalarprodukt:

$$\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 = 0;$$

das Vektorprodukt:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (0, \quad 0, \quad 1).$$

- $\mathbf{v}_1 = (0, 3, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 3, 0)$.

das Skalarprodukt:

$$\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 = 9;$$

das Vektorprodukt:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (-12, \quad 16, \quad -12).$$

- $\mathbf{v}_1 = (-6, 2, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (3, -1, -2)$.

das Skalarprodukt:

$$\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 = -28;$$

das Vektorprodukt:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (0, \quad 0, \quad 0).$$

- $\mathbf{v}_1 = (0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, $\mathbf{v}_2 = (-\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)$.

das Skalarprodukt:

$$\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 = 0;$$

das Vektorprodukt:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, \quad 1, \quad 1).$$

(b) Die erste drei Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1),$$

sowie die letzte drei Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1),$$

bilden eine orthonormierte Basis.

2. Getriebene Teilchen:

In dieser Aufgabe wird eindimensionale Bewegung angenommen.

(a) Für ein Teilchen der Masse m mit $v(0) = 0$, $x(0) = 0$, ist die allgemeine Lösung

$$v(t) = \int_0^t dt' a(t'); \quad x(t) = \int_0^t dt' v(t') = \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' a(t'').$$

Für die gegebene Fälle finden wir:

- $a(t) = a_0$:

$$v(t) = a_0 t, \quad x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2.$$

- $a(t) = a_0(t/t_0)$:

$$v(t) = a_0 \frac{t^2}{2t_0}, \quad x(t) = \frac{a_0}{6t_0} t^3.$$

- $a(t) = a_0 \cos(\omega t)$:

$$v(t) = \frac{a_0}{\omega} \sin(\omega t), \quad x(t) = \frac{a_0}{\omega^2} [1 - \cos(\omega t)].$$

- $a(t) = a_0 e^{-\eta t}$:

$$v(t) = \frac{a_0}{\eta} [1 - e^{-\eta t}], \quad x(t) = \frac{a_0}{\eta} t + \frac{a_0}{\eta^2} [e^{-\eta t} - 1].$$

- $a(t) = a_0 \cos^2(\omega t) = \frac{a_0}{2} [\cos(2\omega t) + 1]$:

$$v(t) = \frac{a_0}{2} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) \right], \quad x(t) = \frac{a_0}{4} \left[t^2 + \frac{1}{2\omega^2} [1 - \cos(2\omega t)] \right].$$

(b) Für ein Teilchen der Masse m mit $v(0) = 0$, $x(0) = x_0$, ist die allgemeine Lösung

$$v(t) = \int_0^t dt' a(t'); \quad x(t) = x_0 + \int_0^t dt' v(t') = x_0 + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' a(t'').$$

(c) Für ein Teilchen der Masse m mit $v(0) = v_0$, $x(0) = 0$, ist die allgemeine Lösung

$$v(t) = v_0 + \int_0^t dt' a(t'); \quad x(t) = \int_0^t dt' v(t') = v_0 t + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' a(t'').$$

3. Teilchentrajektorie:

(a) Um die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ der gegebenen Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ zu erhalten, müssen wir nach der Zeit ableiten

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = (-R\omega \sin \omega t, \quad R\omega \cos \omega t, \quad c),$$

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = (-R\omega^2 \cos \omega t, \quad -R\omega^2 \sin \omega t, \quad 0).$$

Die zu dieser Beschleunigung benötigte Kraft ergibt sich einfach durch $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ aus dem obigen Resultat.

(b) Die Bogenlänge errechnet sich zu

$$s(t) = \sqrt{R^2\omega^2 + c^2} t = \zeta^{-1} t, \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{R^2\omega^2 + c^2}}.$$

Hier ζ ist eine inverse Geschwindigkeit $[(m/s)^{-1}]$.

(c) Um die Ableitungen nach s zu berechnen, müssen wir die Zeit durch die Bogenlänge ersetzen $t(s) = \zeta s$. Wir erhalten für die drei Vektoren

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = (-R\omega\zeta \sin \omega\zeta s, \quad R\omega\zeta \cos \omega\zeta s, \quad c\zeta),$$

$$\mathbf{n}(s) = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{1}{\left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|} = (-\cos \omega\zeta s, \quad -\sin \omega\zeta s, \quad 0),$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = (c\zeta \sin \omega\zeta s, \quad -c\zeta \cos \omega\zeta s, \quad R\omega\zeta).$$

Die Krümmung berechnet sich zu

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right| = R\omega^2\zeta^2,$$

und für die Torsion findet man

$$\tau(s) = \left| \frac{d\mathbf{b}}{ds} \right| = c\omega\zeta^2.$$

- (d) Die Kurve beschreibt eine Schraubenlinie, die sich entlang der z -Achse mit konstanter Geschwindigkeit c bewegt.

Die Krümmung κ ist ein Maß für die Änderung der Richtung der Tangente der Kurve, also der Änderung der Geschwindigkeitsrichtung. Das Inverse der Krümmung $\kappa = 1/r_0$ bezeichnet man auch als Krümmungsradius wobei $r_0(s)$ der Radius des Kreises ist, der sich an die Kurve am Punkt $s(t)$ anschmiegt.

Die Torsion τ ist ein Maß dafür wie sich die Bahnkurve aus der Ebene aufgespannt von $\mathbf{t}$ und $\mathbf{n}$ herausdreht. Für eine Kurve, die sich in einer festen Ebene bewegt, findet man $\tau = 0$.