

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 19/20**Prof. Dr. A. Shnirman**
PD Dr. B. Narozhny**Blatt 1**
Lösungsvorschlag

1. Flussübersetzung:

Wählen wir die Stromrichtung als x -Achse und die Richtung quer zum Fluss als y -Achse. Das Boot soll sich etwa in Gegenrichtung zum Fluss bewegen. Deshalb definieren wir den Winkel zwischen der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und die Stromrichtung ($\boldsymbol{e}_x$) als

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Die zwei Komponenten der Geschwindigkeit sind dann

$$v_x = -v \sin \alpha, \quad v_y = v \cos \alpha.$$

Das Boot übersetzt den Fluss in der Zeit

$$t = \frac{W}{v_y},$$

wobei W die Breite des Flusses ist. Die Abdrift ist denn

$$s = (v_x + u) t = W \frac{v_x + u}{v_y} = W \frac{-v \sin \alpha + 2v}{v \cos \alpha} = W \frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Um das Minimum der Abdrift zu finden, berechnen wir die Ableitung

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha} = W \frac{2 \sin \alpha - 1}{\cos^2 \alpha},$$

und setzen die auf Null:

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \sin \alpha - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Deswegen finden wir den Winkel

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

2. Schiefer Wurf:

Der erste Körper bewegt sich gerade noch oben. Seine Bewegungsgleichung ist

$$y_1(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

wobei $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ die Schwerebeschleunigung ist. Wir haben den Ausgangspunkt als den Ursprung des Koordinatensystems gewählt.

Der zweite Körper bewegt sich im Winkel von ϑ gegen die Horizontale. Die entsprechenden Bewegungsgleichungen sind

$$x_2(t) = v_0 \cos \vartheta t, \quad y_2(t) = v_0 \sin \vartheta t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Der Abstand zwischen beiden Körpern ist

$$d = \sqrt{x_2^2 + (y_2 - y_1)^2} = v_0 t \sqrt{\cos^2 \vartheta + (1 - \sin \vartheta)^2} = v_0 t \sqrt{2(1 - \sin \vartheta)}.$$

Mit den gegebenen Werten berechnen wir

$$d = 22 \text{ m}.$$

3. Beschleunigte Bewegung:

Für eine eindimensionale Bewegung gilt

$$v = \dot{x}.$$

Dann die gegebene Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Koordinate ergibt eine Differentialgleichung

$$\dot{x} = \alpha \sqrt{x}.$$

Diese Gleichung lösen wir folgendermaßen:

$$\dot{x} = \alpha \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha \int dt \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{x} = \alpha t + \text{const.}$$

Die Lösung der Gleichung mit der Anfangsbedingung $x(t=0) = 0$ ist

$$x(t) = \frac{1}{4} \alpha^2 t^2.$$

Die Geschwindigkeit finden wir als

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{1}{2} \alpha^2 t.$$

Die Beschleunigung ist

$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{1}{2} \alpha^2.$$

Die Zeit, die das Teilchen benötigt um die Strecke s zu durchmessen ist

$$t_s = \frac{2}{\alpha} \sqrt{s}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit des Teilchens, gemittelt über diese Zeit, ist

$$\langle v \rangle_s = \frac{1}{t_s} \int_0^{t_s} dt v(t) = \frac{1}{4} \alpha^2 t_s = \frac{1}{2} \alpha \sqrt{s}.$$