Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 19/20

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny

Blatt 2
Besprechung 01.11.2019

---

1. Sphärische Koordinaten: (20 Punkte)

In dreidimensionalen kartesischen Koordinaten ist der Ortsvektor gegeben durch

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_x + y(t)\boldsymbol{e}_y + z(t)\boldsymbol{e}_z.$$

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung ergeben sich durch Ableitung nach der Zeit zu

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \dot{x}(t)\boldsymbol{e}_x + \dot{y}(t)\boldsymbol{e}_y + \dot{z}(t)\boldsymbol{e}_z$$

und

$$\boldsymbol{a}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \ddot{x}(t)\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}(t)\boldsymbol{e}_y + \ddot{z}(t)\boldsymbol{e}_z.$$

Hier haben wir verwendet, dass die orthonormierten Basisvektoren

$$\boldsymbol{e}_x = (1,0,0), \qquad \boldsymbol{e}_y = (0,1,0), \qquad \boldsymbol{e}_z = (0,0,1)$$

zeitunabhängig sind. Es kann auch sinnvoll sein, ein orthonormiertes Basissystem zu verwenden, das sich mit dem Ortsvektor bewegt. Das sphärische Koordinatensystem ist ein solches System. Die Transformation zu sphärischen Koordinaten ist definiert als

$$\begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{cases}, \qquad r > 0, \quad \vartheta \in [0,\pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Die Basisvektoren $\boldsymbol{e}_r(t)$, $\boldsymbol{e}_\vartheta(t)$, und $\boldsymbol{e}_\varphi(t)$ sind nun *zeitabhängig*, da sie sich mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}(t)$ mitbewegen.

(a) Berechnen Sie $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\vartheta$ und $\boldsymbol{e}_\varphi$, die definiert sind als $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$, $\boldsymbol{e}_\vartheta = \partial\boldsymbol{e}_r/\partial\vartheta$ und $\boldsymbol{e}_\varphi = (1/\sin\vartheta)\partial\boldsymbol{e}_r/\partial\varphi$.

(b) Drücken Sie den Ortsvektor $\boldsymbol{r}(t)$ in der sphärischen Koordinatenbasis $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\vartheta, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ aus.

(c) Drücken Sie die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ in der sphärischen Koordinatenbasis $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\vartheta, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ aus. Beachten Sie, dass die Basisvektoren auch von der Zeit abhängen.

(d) Drücken Sie die Beschleunigung $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ in der sphärischen Koordinatenbasis $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\vartheta, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ aus.

2. Zweidimensionale beschleunigte Bewegung: (15 Punkte)

In kartesischen Koordinaten ist der Ortsvektor eines Teilchens gegeben durch

$$\boldsymbol{r}(t) = at\boldsymbol{e}_x - bt^2\boldsymbol{e}_y, \qquad a > 0, \quad b > 0,$$

wobei a und b zeitunabhängig sind. Finden Sie

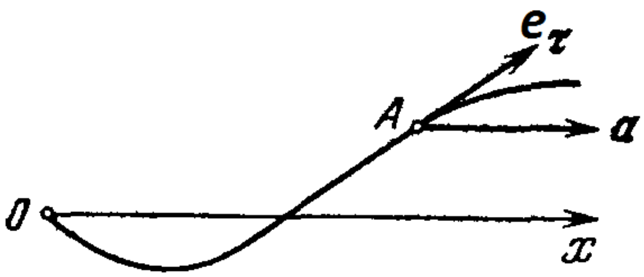
(a) die Gleichung der Bahnkurve $y(x)$; skizzieren Sie diese Funktion;

(b) die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$ und die Beschleunigung $\boldsymbol{a}(t)$;

(c) den zeitabhängigen Winkel zwischen $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{a}$;

(d) die mittlere Geschwindigkeit des Teilchens, gemittelt über die Zeit t.

3. Eindimensionale beschleunigte Bewegung: (15 Punkte)



Ein Teilchen A bewegt sich entlang einer gegebenen Trajektorie mit einer tangentialen Beschleunigung $a_\tau = \boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_\tau$, wobei $\boldsymbol{a}$ ein konstanter Vektor in x-Richtung und $\boldsymbol{e}_\tau$ ein Einheitsvektor in tangentialer Richtung, d.h. in der Richtung der Geschwindigkeit ($\boldsymbol{e}_\tau = \boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$), seien (siehe Abbildung). Finden Sie die Abhängigkeit der Geschwindigkeit des Teilchens von der Koordinate x, wenn das Teilchen am Punkt $x = 0$ stationär war.