

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 19/20

Prof. Dr. A. Shnirman

Blatt 2

PD Dr. B. Narozhny

Lösungsvorschlag

1. Sphärische Koordinaten:

- (a) Zuerst drücken wir die Komponenten des Ortsvektors als Funktionen von r , ϑ und φ aus:

$$\mathbf{r} = r \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + r \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y + r \cos \vartheta \mathbf{e}_z.$$

Dann finden wir laut der Definition

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \vartheta \mathbf{e}_z;$$

$$\mathbf{e}_\vartheta = \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \vartheta} = \cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \vartheta \mathbf{e}_z;$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y.$$

- (b) Nun finden wir die kartesischen Einheitsvektoren als Funktionen der sphärischen Einheitsvektoren. Wir berechnen die inverse Transformationsmatrix (dies ist eine orthogonale Matrix, deswegen $M^{-1} = M^T$) und finden

$$\mathbf{e}_x = \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_r + \cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_\vartheta - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi;$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_\vartheta + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi;$$

$$\mathbf{e}_z = \cos \vartheta \mathbf{e}_r - \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta.$$

Jetzt finden wir den Ortsvektor:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r.$$

- (c) Die Geschwindigkeit ist die Zeitableitung des Ortsvektors:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r.$$

Die Ableitung des Einheitsvektors berechnen wir mithilfe der Definitionen der Einheitsvektoren:

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi.$$

Deswegen

$$\mathbf{v}(t) = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + r \dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi.$$

(d) Die Beschleunigung ist die Zeitableitung der Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \left(\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta}\right)\mathbf{e}_{\vartheta} + r\dot{\vartheta}\dot{\mathbf{e}}_{\vartheta} \\ &+ \left(\dot{r}\dot{\varphi}\sin\vartheta + r\ddot{\varphi}\sin\vartheta + r\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right)\mathbf{e}_{\varphi} + r\dot{\varphi}\sin\vartheta\dot{\mathbf{e}}_{\varphi}.\end{aligned}$$

Die Ableitungen der Einheitsvektoren berechnen wir mithilfe der entsprechenden Definitionen:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_{\vartheta} &= -\dot{\vartheta}\mathbf{e}_r + \dot{\varphi}\cos\vartheta\mathbf{e}_{\varphi}, \\ \dot{\mathbf{e}}_{\varphi} &= -\dot{\varphi}\sin\vartheta\mathbf{e}_r - \dot{\varphi}\cos\vartheta\mathbf{e}_{\vartheta}.\end{aligned}$$

Letztendlich finden wir

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) &= \left[\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\right]\mathbf{e}_r + \left[2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta\right]\mathbf{e}_{\vartheta} \\ &+ \left[2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\vartheta + r\ddot{\varphi}\sin\vartheta + 2r\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right]\mathbf{e}_{\varphi}.\end{aligned}$$

2. Zweidimensionale beschleunigte Bewegung:

(a) Die zwei Komponenten des Ortsvektors sind

$$x(t) = at, \quad y(t) = -bt^2.$$

Wir lösen die erste Gleichung nach der Zeit auf

$$t = \frac{x}{a},$$

und ersetzen hiermit die Zeit in der zweite Gleichung

$$y(x) = -\frac{b}{a^2}x^2.$$

(b) Die Geschwindigkeit ist die Ableitung

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = a\mathbf{e}_x - 2bt\mathbf{e}_y.$$

Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = -2b\mathbf{e}_y.$$

(c) Den Winkel zwischen zwei Vektoren finden wir mithilfe des Skalarprodukts

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \vartheta \quad \Rightarrow \quad \cos \vartheta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}.$$

Für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung gelten:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 4b^2 t, \quad v = \sqrt{a^2 + 4b^2 t^2}, \quad a = 2b,$$

deswegen

$$\cos \vartheta = \frac{2bt}{\sqrt{a^2 + 4b^2 t^2}}.$$

Einen einfachen Ausdruck finden wir für den Tangens

$$\tan \vartheta = \frac{a}{2bt}.$$

(d) Die mittlere Geschwindigkeit ist

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t dt' \mathbf{v}(t') = a \mathbf{e}_x - b t \mathbf{e}_y.$$

3. Eindimensionale beschleunigte Bewegung:

Die Beschleunigung als jeder Vektor kann man in einer beliebiger Basis ausdrücken. Hier wählen wir die Einheitsvektoren in der tangentialen und der normalen Richtungen als Basisvektoren:

$$\mathbf{a} = a_\tau \mathbf{e}_\tau + a_n \mathbf{e}_n.$$

Weil die Einheitsvektoren senkrecht zueinander sind, gilt

$$a_\tau = \mathbf{a} \mathbf{e}_\tau.$$

Die tangentielle Richtung ist die Richtung der Geschwindigkeit

$$\mathbf{e}_\tau = \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad v = |\mathbf{v}|.$$

Die tangentielle Beschleunigung ändert den Betrag der Geschwindigkeit

$$a_\tau = \dot{v}.$$

Jetzt umschreiben wir die gegebene Relation

$$a_\tau = \mathbf{a} \mathbf{e}_\tau \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = \mathbf{a} \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

Die Geschwindigkeit ist die Zeitableitung des Ortsvektors

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}.$$

Weil $\mathbf{a}$ zeitunabhängig ist, gilt

$$\mathbf{a}\mathbf{v} = \mathbf{a}\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{a}\mathbf{r}).$$

Da der gegebene Vektor $\mathbf{a}$ parallel zur x-Achse ist gilt

$$\mathbf{a}\mathbf{r} = ax, \quad \Rightarrow \quad a = |\mathbf{a}|.$$

Jetzt finden wir

$$v\dot{v} = \frac{d}{dt}(\mathbf{a}\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} (ax).$$

Mit der Anfangsbedingung $v(x=0) = 0$ ist die Lösung

$$v = \sqrt{2ax}.$$