

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 19/20**Prof. Dr. A. Shnirman**
PD Dr. B. Narozhny**Blatt 4**
Lösungsvorschlag

1. Periodische Kraft:

Newton'sche Gleichung:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \frac{1}{m}\mathbf{F}_0 \cos \omega t.$$

Die Geschwindigkeit (von der Definition mit $\mathbf{v}(t=0) = 0$)

$$\mathbf{v} = \int_0^t dt' \mathbf{a}(t') = \frac{\mathbf{F}_0}{m} \int_0^t dt' \cos \omega t' = \frac{\mathbf{F}_0}{m\omega} \sin \omega t.$$

Die Verschiebung (mit $\mathbf{s}(t=0) = 0$)

$$\mathbf{s} = \int_0^t dt' \mathbf{v}(t') = \frac{\mathbf{F}_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

(a) Erster Halt

$$v(t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega t_1 = \pi \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{\omega}.$$

(b) Die zurückgelegte Strecke

$$\Delta s = s(t_1) - s(0) = \frac{2F_0}{m\omega^2}.$$

(c) Die maximale Geschwindigkeit

$$\max[\sin \omega t] = 1 \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = \frac{F_0}{m\omega}$$

2. Luftwiderstand:

Lösung 1

Zuerst betrachten wir die Aufwärtsbewegung bis zum Wendepunkt. Hier wird die Luftwiderstandskraft nach unten gerichtet.

Newton'sche Gleichung:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = -g - \frac{\alpha}{m}v.$$

Wir bezeichnen

$$\gamma = \frac{\alpha}{mg}.$$

Nun lösen wir die Differentialgleichung

$$\dot{v} = -g(1 + \gamma v) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{1 + \gamma v} = -gdt \quad \Rightarrow \quad \ln(1 + \gamma v) - \ln(1 + \gamma v_0) = -\gamma gt.$$

Jetzt finden wir die Höhe des Wendepunktes (wobei $v(t_w) = 0$)

$$\begin{aligned} h &= \int_0^{t_w} v(t)dt = v(t)t \Big|_0^{t_w} - \int_{v_0}^0 t dv = -\frac{1}{\gamma g} \int_{v_0}^0 dv [\ln(1 + \gamma v_0) - \ln(1 + \gamma v)] \\ &= \frac{v_0}{\gamma g} - \frac{1}{\gamma^2 g} \ln(1 + \gamma v_0) \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Abwärtsbewegung vom Wendepunkt aus. Hier wird die Luftwiderstandskraft nach oben gerichtet. Die Anfangsgeschwindigkeit für diese Bewegung ist Null.

Newton'sche Gleichung:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = g - \frac{\alpha}{m}v,$$

deswegen

$$\dot{v} = g(1 - \gamma v) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{1 - \gamma v} = gdt \quad \Rightarrow \quad \ln(1 - \gamma v) = -\gamma gt,$$

sodass

$$v(t) = \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma gt}).$$

Die zurückgelegte Strecke ist jetzt (hier $v(0) = v(t_w) = 0$)

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t v(t')dt' = -\frac{1}{\gamma} \int_0^t dt' (1 - e^{-\gamma gt'}) = \frac{t}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2 g} (-1 + e^{-\gamma gt}) \\ &= \frac{t}{\gamma} - \frac{v(t)}{\gamma g}. \end{aligned}$$

Schließlich, um die Geschwindigkeit zu bestimmen, mit der der Körper zum Ausgangspunkt zurückkehrt, finden wir die Zeit, die der Körper benötigt hat, um herunterzufallen, indem wir die Längen der Auf- und Abwärtsbewegungen gleich einstellen:

$$s(t^*) = h$$

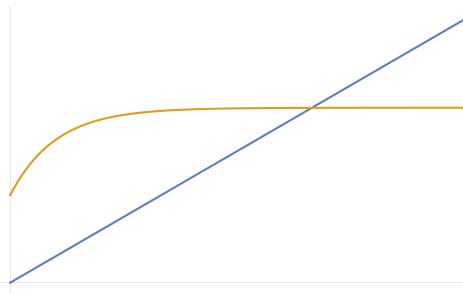
Dies ist eine transzendente Gleichung, die nicht analytisch gelöst werden kann. Wenn wir diese Gleichung numerisch lösen, können wir t^* finden. Die Geschwindigkeit ist dann gegeben durch

$$v(t^*) = gt^* - \gamma g s(t^*).$$

Was wir tun können, ist, die Grenzfälle zu analysieren. Wir schreiben die transzendente Gleichung um

$$\frac{t^*}{\gamma} = \frac{1}{\gamma^2 g} (1 - e^{-\gamma g t^*}) + h.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine lineare Funktion, während die rechte Seite auf eine Konstante gesättigt ist, siehe Abbildung.



Wenn die Zeit, die benötigt wird, bis der Körper wieder herunterfällt, lang ist, dann ist die Funktion in der rechten Seite der Gleichung gesättigt und wir können sie durch eine Konstante approximieren:

$$\frac{t^*}{\gamma} \approx \frac{1}{\gamma^2 g} + h.$$

Die ungefähre Lösung ist dann

$$v(t^*) \approx \frac{mg}{\alpha}.$$

Lösung 2

Die Newton'sche Gleichungen für beide der oben genannten Fälle können zu einer einzigen Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Höhe kombiniert werden:

$$m\ddot{h} + \alpha\dot{h} = -mg.$$

Diese Gleichung hat folgende allgemeine Lösung

$$h(t) = -\frac{mg}{\alpha}t + Ae^{-\alpha t/m} + B.$$

Die Anfangsbedingungen ergeben:

$$h(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B;$$

$$v(t=0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = -\frac{mg}{\alpha} - \frac{\alpha}{m}A \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{mv_0}{\alpha} - \frac{m^2g}{\alpha^2},$$

sodass

$$h(t) = \left[\frac{mv_0}{\alpha} + \frac{m^2g}{\alpha^2} \right] (1 - e^{-\alpha t/m}) - \frac{mg}{\alpha}t.$$

Die Geschwindigkeit ist dann

$$v(t) = v_0 e^{-\alpha t/m} - \frac{mg}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t/m}).$$

Jetzt finden wir die Zeit, die der Körper braucht, um zum Anfangspunkt zurückzukehren

$$h(t^*) = 0.$$

Von diesem Punkt an folgen wir der obigen Lösung 1.

3. Ein Boot auf einem See:

Nach dem Abstellen des Motors wirkt auf das Boot nur noch die Reibungskraft. Das Boot bewegt sich dann entlang der Geraden, also schreiben wir die eindimensionale Newton'sche Gleichung mit der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$:

$$ma = f \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = -\frac{\alpha}{m}v$$

Wir lösen nun die Differentialgleichung:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\alpha}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{v}{v_0} = -\frac{\alpha t}{m} \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 e^{-\alpha t/m}.$$

Die Weglänge finden wir als ein Integral

$$s(t) = \int_0^t dt' v(t') = \frac{mv_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t/m}).$$

(a) Genau genommen hält das Boot nie an, so dass die Zeit bis zum Stillstand divergiert

$$t \rightarrow \infty.$$

(b) Wir kombinieren die oben genannten Lösungen für die Geschwindigkeit und die Weglänge und finden

$$s \frac{\alpha}{m} = v_0 - v \quad \Rightarrow \quad v = v_0 - \frac{s\alpha}{m}.$$

(c) Die gesamte vom Boot zurückzulegende Strecke wird durch die Langzeitbegrenzung der Weglänge gegeben

$$S_{gesamt} = s(t \rightarrow \infty) = \frac{mv_0}{\alpha}.$$

- (d) Die Zeit, in welcher sich die Geschwindigkeit des Bootes auf ein n -tel der ursprünglichen Geschwindigkeit verringert hat, definieren wir als

$$t_n \quad \Leftrightarrow \quad v_n = \frac{v_0}{n} = v_0 e^{-\alpha t_n/m} \quad \Rightarrow \quad t_n = \frac{m}{\alpha} \ln n.$$

Die mittlere Geschwindigkeit ist dann

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} dt v(t) = \frac{v_0}{t_n} \int_0^{t_n} dt e^{-\alpha t/m} = \frac{mv_0}{\alpha t_n} (1 - e^{-\alpha t_n/m}) = v_0 \frac{n-1}{n \ln n}.$$

4. Zeitabhängige Kraft:

Am Anfang ist die Antriebskraft klein und wird durch die Haftreibung vollständig kompensiert. Der Körper bleibt stehen, bis der Maximalwert der Reibungskraft erreicht ist

$$bt = f \quad \Rightarrow \quad bt_0 = \mu mg \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{\mu mg}{b}.$$

Für die Zeiten $t > t_0$ bewegt sich der Körper mit der Beschleunigung, die sich aus der Newton'sche Gleichung ergibt

$$ma = bt - \mu mg \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b}{m}(t - t_0).$$

Bis zum Zeitpunkt t legt der Körper die folgende Strecke zurück

$$s = \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' a(t'') = \frac{b}{6m}(t - t_0)^3.$$