

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 19/20**Prof. Dr. A. Shnirman****Blatt 5****PD Dr. B. Narozhny****Lösungsvorschlag**

1. Newtonsche Dynamik I:

- (a) Betrachten Sie zunächst die Kräfte, die auf die Körper wirken. (3 Punkte)

Der Körper 0 bewegt sich horizontal. Die einzige horizontale Kraft, die auf diesen Körper wirkt, ist die Fadenspannung. Daher ist die Newton-Gleichung für den Körper 0 wie folgt

$$m_0 a_0 = T_0.$$

Die Körper 1 und 2 bewegen sich vertikal. Auf sie wirken jeweils zwei vertikale Kräfte: die Fadenspannung und die Schwerkraft. Wir wählen die positive vertikale Richtung nach unten und bezeichnen mit a_1 und a_2 die Projektionen der Beschleunigung auf die vertikale Achse (das bedeutet, dass a_1 und a_2 entweder positiv oder negativ sein können). Die daraus resultierenden Newton-Gleichungen für die Körper 1 und 2 sind

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad m_2 a_2 = m_2 g - T_2.$$

- (b) Betrachten Sie jetzt die Einschränkungen. (3 Punkte)

Wir nehmen an, dass die Faden nicht dehnbar sind, deswegen

$$T_1 = T_2.$$

Auch nehmen wir an, dass die Massen der Faden und der Rollen vernachlässigbar sind, deswegen

$$T_0 = T_1 + T_2 = 2T_1.$$

Schließlich, betrachten Sie die Verschiebungen der Körper 1 und 2, δy_1 und δy_2 . Diese bestehen aus der Verschiebung der hängenden Riemenscheibe und der Verschiebung des Fadens δs (gegenüber der Riemenscheibe), der die Körper 1 und 2 verbindet. Die Verschiebung der Riemenscheibe ist die gleiche wie die Verschiebung δx des Körpers 0, so dass wir feststellen

$$\delta y_2 = \delta s + \delta x, \quad \delta y_1 = -\delta s + \delta x, \quad \Rightarrow \quad a_1 + a_2 = 2a_0.$$

- (c) Durch die Kombination der oben genannten Argumente kommen wir zum System der linearen Gleichungen (2 Punkte)

$$m_0(a_1 + a_2) = 4T_1$$

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_1.$$

- (d) Wir lösen die obigen Gleichungen mit üblichen Methoden. (2 Punkte)

Wir finden für die Beschleunigung des Körpers 1 als

$$a_1 = g \frac{4m_1m_2 + m_0(m_1 - m_2)}{4m_1m_2 + m_0(m_1 + m_2)}.$$

2. Newtonsche Dynamik II:

- (a) (7 Punkte)

Zuerst betrachten wir die Kräfte, die auf ein kleines Element des Fadens wirken.

Die Reibungskraft wird wie gewohnt durch die Normalkraft bestimmt

$$df = \mu dN.$$

Da der Faden gewichtslos ist, ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht in tangentialer Richtung Folgendes

$$dT = df.$$

Schließlich entsteht die Normalkraft durch das Biegen des Fadens

$$dN = Td\theta.$$

Infolgedessen,

$$dT = \mu T d\theta.$$

- (b) (5 Punkte)

Um den Reibungskoeffizient zu ermitteln, betrachten wir den Fall der maximalen Haftreibung. Hier sind die Körper noch stationär, so dass die entsprechenden Newton'schen Gleichungen sind

$$m_1g = T_1, \quad m_2g = T_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2}{m_1} = \eta_0.$$

Die Kräfte T_1 und T_2 entsprechen den Winkeln $-\pi/2$ und $\pi/2$. Um die Beziehung zwischen diesen Kräften zu finden, integrieren wir die obige Gleichung, die das Element des Gewindes beschreibt

$$\mu \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad \mu\pi = \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Kombiniert man das Ergebnis mit den obigen Newton'schen Gleichungen, findet man

$$\mu = \frac{1}{\pi} \ln \eta_0.$$

(c) (3 Punkte)

Wenn das Verhältnis der Massen größer ist, beginnen sich die Körper mit der Beschleunigung a zu bewegen. Die entsprechenden Newton'schen Gleichungen sind

$$m_1 a = T_1 - m_1 g, \quad m_2 a = m_2 g - T_2.$$

Das Verhältnis der beiden Spannungskräfte wird durch die Reibung bestimmt und bleibt somit gleich wie oben beschrieben.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2}{m_1} = \eta_0.$$

Die Lösung dieses Systems von linearen Gleichungen lautet

$$a = \frac{\eta - \eta_0}{\eta + \eta_0} g.$$

3. Schwingungen:

Betrachten Sie ein Minimum des Potentials, z.B. bei $x = 0$. Wir entwickeln das Potential um diesem Punkt

$$U(x \approx 0) \approx \frac{1}{2} U_0 a^2 x^2,$$

sodass die resultierende Kraft ist

$$F = -U' = -U_0 a^2 x.$$

Das ist ähnlich wie das Hooke'sche Gesetz

$$F = -kx, \quad k = U_0 a^2.$$

Die Bewegung ist ähnlich wie ein harmonischen Oszillator mit der Eigenfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{U_0 a^2}{m}}.$$

Deswegen ist die Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{U_0 a^2}}.$$

4. Eine Pendeluhr:

(a) Betrachten Sie zunächst die Kinematik des Pendels. (5 Punkte)

Wir bezeichnen $\mathbf{r}_0$ die Koordinate des Aufhängepunktes und $\mathbf{R}_\theta$ den Radiusvektor des Pendels relativ zum Aufhängepunkt. Dann ist der Radiusvektor des Pendels

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{R}_\theta.$$

Die Beschleunigung des Pendels ist dann gegeben durch

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} + \ddot{\mathbf{R}}_\theta, \quad \ddot{\mathbf{R}}_\theta = R\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta.$$

- (b) Betrachten Sie nun die Newton'sche Gleichung für das Pendel. (5 Punkte)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{T}.$$

Betrachten Sie die Projektion auf die Richtung $\mathbf{e}_\theta$. Während der Aufwärtsbewegung finden wir

$$mg \sin \theta = mR\ddot{\theta} - ma \sin \theta,$$

sodass die Eigenfrequenz ist

$$\omega_\uparrow = \sqrt{\frac{g+a}{R}}.$$

Ebenso, während der Abwärtsbewegung

$$mg \sin \theta = mR\ddot{\theta} + ma \sin \theta,$$

sodass die Eigenfrequenz ist

$$\omega_\downarrow = \sqrt{\frac{g-a}{R}}.$$

- (c) Betrachten wir jetzt die Zeit. (5 Punkte)

Die Zeit der Aufwärtsbewegung ist

$$t_h = \sqrt{\frac{2h}{a}}.$$

Die Anzahl der Schwingungen des Pendels während dieser Zeit ist

$$n_h = \frac{\sqrt{\frac{2h}{a}}}{2\pi\sqrt{\frac{R}{g+a}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2h}{R}}\sqrt{\frac{g+a}{a}}.$$

Die Zeit die die Uhr zur Zeit t_h zeigt ist

$$\tilde{t}_h = n_h T_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2h}{R}}\sqrt{\frac{g+a}{a}}2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = t_h\sqrt{\frac{g+a}{g}}.$$

Betrachten wir einen späteren Zeitpunkt

$$t = t_h + \delta t.$$

Ebenso, wäre die Zeit δt wegen der Uhr als

$$\tilde{\delta t} = \delta t\sqrt{\frac{g-a}{g}}.$$

Die Gesamtzeit wäre wegen der Uhr

$$\tilde{t} = t_h\sqrt{\frac{g+a}{g}} + \delta t\sqrt{\frac{g-a}{g}}.$$

Wir suchen den Zeitpunkt wo die angezeigte Uhrzeit richtig ist

$$t = \tilde{t} \quad \Rightarrow \quad t_h\sqrt{\frac{g+a}{g}} + \delta t\sqrt{\frac{g-a}{g}} = t_h + \delta t.$$

Das ergibt

$$\delta t = t_h \frac{\sqrt{\frac{g+a}{g}} + 1}{\sqrt{\frac{g-a}{g}} - 1},$$

sodass

$$t = t_h \frac{\sqrt{1+a/g} - \sqrt{1-a/g}}{1 - \sqrt{1-a/g}}.$$