

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 19/20

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. NarozhnyBlatt 6
Lösungsvorschlag

1. Komplexe Zahlen:

(a) (2 Punkte)

$$\left| \frac{z_1 + z_2^*}{z_3} \right| = \left| \frac{1 + 2i + 2 + 3i}{4 + i} \right| = \left| \frac{3 + 5i}{4 + i} \right| = \left| \frac{(3 + 5i)(4 - i)}{17} \right| = \left| \frac{17 + 17i}{17} \right| = \sqrt{2}.$$

(b) (2 Punkte)

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 + 2i}{2 - 3i} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{(1 + 2i)(2 + 3i)}{13} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{-4 + 7i}{13} \right) = -\frac{4}{13}.$$

(c) (2 Punkte)

$$z_2^i = e^{i \ln z_2} = e^{i \ln(2-3i)} = e^{i \left(\frac{1}{2} \ln 13 - i \arctan \frac{3}{2} \right)} = e^{\arctan \frac{3}{2}} \left[\cos \frac{\ln 13}{2} + i \sin \frac{\ln 13}{2} \right].$$

(d) (2 Punkte)

$$\ln \frac{z_3}{z_1} = \ln \frac{4 + i}{1 + 2i} = \ln \frac{(1 - 2i)(4 + i)}{5} = \ln \frac{6 - 7i}{5} = \frac{1}{2} \ln \frac{17}{5} - i \arctan \frac{7}{6}.$$

(e) (2 Punkte)

$$\arg(z_1^* z_3) = \arg[(1 - 2i)(4 + i)] = \arg[6 - 7i] = -\arctan \frac{7}{6}.$$

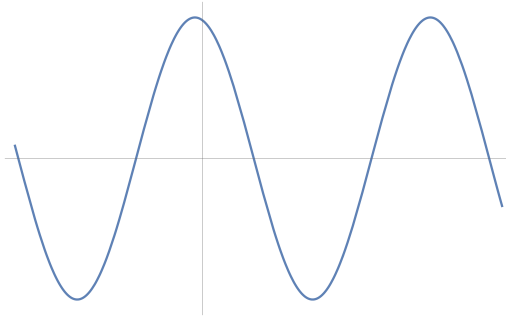
2. Schwingungen I:

(a)

(6 Punkte)

Die Koordinate als Funktion der Zeit ist

$$x(t) = 2 \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) - 3 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right).$$



Hier

$$x(0) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + 3 \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

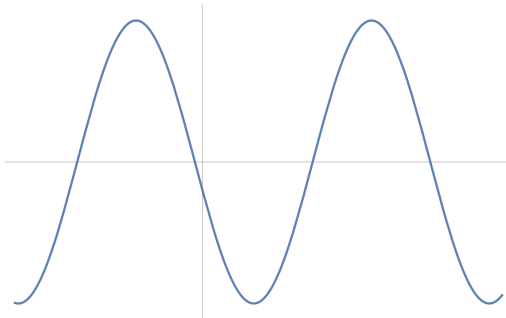
$$x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = t_n^{(0)} \equiv \frac{\pi}{4\omega} - \frac{2}{\omega} \arctan \frac{\sqrt{13} + 3}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\dot{x}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = t_n^{(1)} \equiv \frac{\pi}{4\omega} - \frac{2}{\omega} \arctan \frac{\sqrt{13} - 2}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x(t_0^{(1)}) = \sqrt{13}.$$

Die Geschwindigkeit v_x als Funktion der Zeit ist

$$v_x(t) = -2\omega \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) - 3\omega \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right).$$



Hier

$$v_x(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega,$$

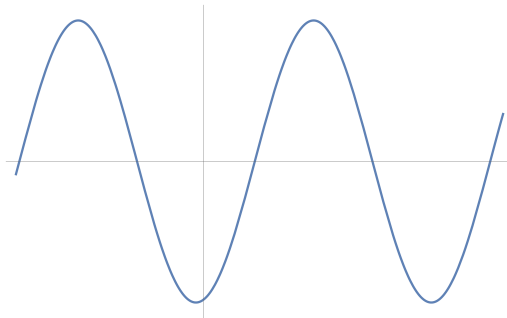
$$v_x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = t_n^{(1)},$$

$$\dot{v}_x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = t_n^{(0)},$$

$$v_x(t_0^{(1)}) = \sqrt{13}\omega.$$

Die Beschleunigung a_x als Funktionen der Zeit ist

$$a_x(t) = -\omega^2 x(t) = -2\omega^2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + 3\omega^2 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$



Hier

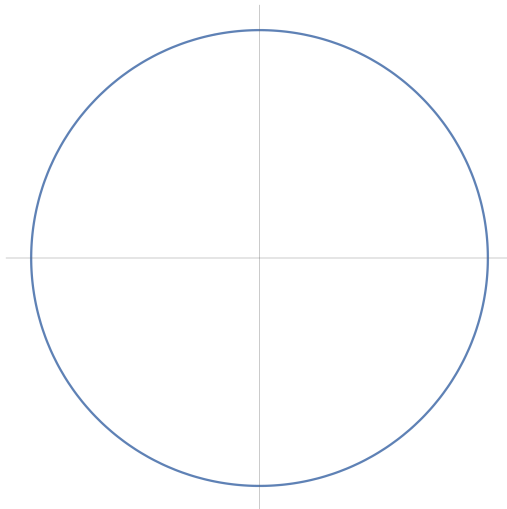
$$\begin{aligned} a_x(0) &= -\omega^2 \frac{5\sqrt{2}}{2}, \\ a_x(t) = 0 &\Rightarrow t = t_n^{(0)}, \\ \dot{a}_x(t) = 0 &\Rightarrow t = t_n^{(1)}, \\ a_x(t_0^{(1)}) &= -\sqrt{13} \omega^2. \end{aligned}$$

(b)

(4 Punkte)

Die Geschwindigkeit v_x als Funktion der Koordinate

$$\left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2 + x^2 = 13.$$



Die Beschleunigung a_x als Funktion der Koordinate

$$a_x = -\omega^2 x.$$

3. Gedämpfter Oszillator:

(a) Wir verwenden den Ansatz

$$x(t) \sim e^{\lambda t}.$$

Dann finden wir die Gleichung für λ

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda + \beta)^2 = \beta^2 - \omega_0^2.$$

Wir unterscheiden drei Fälle.

- Starke Dämpfung

$$\beta^2 - \omega_0^2 > 0.$$

Hier finden wir zwei reelle Lösungen für λ

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \gamma, \quad \gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < \beta \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} < 0.$$

Die allgemeine Lösung für die Koordinate lautet

$$x(t) = e^{-\beta t} [a e^{\gamma t} + b e^{-\gamma t}].$$

Die entsprechende Geschwindigkeit ist

$$v_x(t) = -a(\beta - \gamma)e^{-(\beta-\gamma)t} - b(\beta + \gamma)e^{-(\beta+\gamma)t}.$$

Für die Anfangsbedingungen $x = x_0$, $v_x = 0$ finden wir die Konstanten a und b

$$\begin{aligned} x_0 &= a + b, \\ 0 &= a(\beta - \gamma) + b(\beta + \gamma) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a - b = x_0 \frac{\beta}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad a = x_0 \frac{\beta + \gamma}{2\gamma}, \quad b = -x_0 \frac{\beta - \gamma}{2\gamma}.$$

Deswegen, die Geschwindigkeit ist

$$v_x(t) = -\frac{\omega_0 x_0}{2\sqrt{(\beta/\omega_0)^2 - 1}} e^{-\beta t} [e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}].$$

- Kritische Dämpfung

$$\beta^2 - \omega_0^2 = 0.$$

Hier gibt's nur eine einzelne Lösung für λ

$$\lambda = -\beta.$$

Der Ansatz $e^{\lambda t}$ ist jetzt unzureichend. Probieren wir

$$x = \varphi(t)e^{-\beta t}.$$

Wir finden

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \varphi(t) e^{-\beta t} + 2\beta [\dot{\varphi}(t) e^{-\beta t} - \beta \varphi(t) e^{-\beta t}] + \ddot{\varphi}(t) e^{-\beta t} - 2\beta \dot{\varphi}(t) e^{-\beta t} + \beta^2 \varphi(t) e^{-\beta t} &= 0 \\ \Rightarrow \quad \omega_0^2 \varphi(t) e^{-\beta t} - \beta^2 \varphi(t) e^{-\beta t} + \ddot{\varphi}(t) e^{-\beta t} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi}(t) e^{-\beta t} = 0. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir $\beta = \omega_0$ verwendet. Die letzte Gleichung lösen wir mit

$$\varphi(t) = a + bt \quad \Rightarrow \quad x = (a + bt)e^{-\beta t}.$$

Die entsprechende Geschwindigkeit ist

$$v_x(t) = -(a + bt)\beta e^{-\beta t} + be^{-\beta t}.$$

Für die Anfangsbedingungen $x = x_0$, $v_x = 0$ finden wir die Konstanten a und b

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \\ 0 &= -a\beta + b \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a = x_0, \quad b = \beta x_0.$$

Deswegen, die Geschwindigkeit ist

$$v_x(t) = -x_0\beta^2 t e^{-\beta t}.$$

- Schwache Dämpfung

$$\beta^2 - \omega_0^2 < 0.$$

Hier finden wir zwei komplexe Werte für λ

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Die allgemeine Lösung für die Koordinate lautet

$$x(t) = e^{-\beta t} [ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}].$$

Die entsprechende Geschwindigkeit ist

$$v_x(t) = -a(\beta - i\omega)e^{-\beta t + i\omega t} - b(\beta + i\omega)e^{-\beta t - i\omega t}.$$

Für die Anfangsbedingungen $x = x_0$, $v_x = 0$ finden wir die Konstanten a und b

$$\begin{aligned} x_0 &= a + b, \\ 0 &= a(\beta - i\omega) + b(\beta + i\omega) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a - b = x_0 \frac{\beta}{i\omega} \quad \Rightarrow \quad a = x_0 \frac{\beta + i\omega}{2i\omega}, \quad b = -x_0 \frac{\beta - i\omega}{2i\omega}.$$

Deswegen, die Geschwindigkeit ist

$$v_x(t) = -\frac{\omega_0 x_0}{2\sqrt{1 - (\beta/\omega_0)^2}} e^{-\beta t} \sin\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right).$$

- (b) Betrachten wir jetzt die allgemeine Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $v_x(0) = v_0$. Dann finden wir von der obigen Lösung für die schwach gedämpften Schwingung

$$\begin{aligned} x_0 &= a + b, \\ -v_0 &= a(\beta - i\omega) + b(\beta + i\omega) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a - b = \frac{x_0\beta + v_0}{i\omega}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{x_0(\beta + i\omega) + v_0}{2i\omega}, \quad b = -\frac{x_0(\beta - i\omega) + v_0}{2i\omega}.$$

Deswegen, die Lösung für die Koordinate lautet

$$x(t) = x_0 \left(\cos \omega t + \frac{\beta + v_0/x_0}{\omega} \sin \omega t \right) e^{-\beta t}.$$

Im Limes $\omega \rightarrow 0$ finden wir

$$x(t) \rightarrow x_0 \left[1 + \left(\beta + \frac{v_0}{x_0} \right) t \right] e^{-\beta t}.$$

(c) Benutzen wir die obige Lösung für den kritischen Fall

$$x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \left(\beta + \frac{v_0}{x_0} \right) t = 0$$

mit der Lösung

$$t_0 = -\frac{x_0}{v_0 + \beta x_0}.$$

Die gesuchte Bedingung lautet

$$t_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_0}{v_0 + \beta x_0} < 0.$$

(d) Die allgemeine Anfangsbedingungen für den Fall der starken Dämpfung ergeben

$$\begin{aligned} x_0 &= a + b, \\ -v_0 &= a(\beta - \gamma) + b(\beta + \gamma) \quad \Rightarrow \quad a - b = \frac{x_0\beta + v_0}{\gamma} \\ \Rightarrow \quad a &= \frac{x_0(\beta + \gamma) + v_0}{2\gamma}, \quad b = -\frac{x_0(\beta - \gamma) + v_0}{2\gamma}. \end{aligned}$$

Die Lösung für die Koordinate lautet

$$x(t) = x_0 \left[\cosh \gamma t + \frac{\beta + v_0/x_0}{\gamma} \sinh \gamma t \right] e^{-\beta t}.$$

Jetzt finden wir die Nulldurchgang:

$$x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cosh \gamma t + \frac{\beta + v_0/x_0}{\gamma} \sinh \gamma t = 0 \quad \Rightarrow \quad \tanh t = -\frac{\gamma}{\beta + v_0/x_0}.$$

Da für $t > 0$

$$0 < \tanh t < 1$$

finden wir die gesuchte Bedingung

$$\frac{v_0}{x_0} < -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$