

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 19/20**Prof. Dr. A. Shnirman****Blatt 8****PD Dr. B. Narozhny****Lösungsvorschlag**

1. Green'sche Funktion I:

Die Green'sche Funktion einer gedämpften Oszillator ist die Lösung der folgenden Gleichung

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\beta \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right] G(t - t') = \delta(t - t'),$$

mit der Anfangsbedingung

$$G(t - t') = 0 \quad \text{für} \quad t < t'.$$

Erst integrieren wir die Gleichung in einem kleinen Intervall um Null herum

$$\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\beta \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right] G(t - t') = 1.$$

Da die Green'sche Funktion kontinuierlich ist, finden wir heraus

$$\left. \frac{d}{dt} G(t - t') \right|_{t=t'+0} - \left. \frac{d}{dt} G(t - t') \right|_{t=t'-0} = 1.$$

Nun betrachten wir die Gleichung für $t > t'$. Hier $\delta(t - t') = 0$ und wir können die allgemeine Lösungen von Blatt 6 benutzen mit der Anfangsbedingungen

$$G(t - t')|_{t=t'+0} = 0, \quad \left. \frac{d}{dt} G(t - t') \right|_{t=t'+0} = 1.$$

(a) In der Fall der kritischen Dämpfung lautet die allgemeine Lösung

$$G(t) = (a + bt)e^{-\beta t}.$$

Die Konstante a und b finden wir von der obigen Anfangsbedingungen

$$G(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0,$$

$$\dot{G}(0^+) = 1 \quad \Rightarrow \quad -\beta a + b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1.$$

Letztendlich finden wir die Green'sche Funktion

$$G(t - t') = (t - t')e^{-\beta(t-t')}\theta(t - t').$$

(b) In der Fall der starken Dämpfung lautet die allgemeine Lösung

$$G(t) = e^{-\beta t} [ae^{\gamma t} + be^{-\gamma t}], \quad \gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Die Konstante a und b finden wir von der obigen Anfangsbedingungen

$$G(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -a,$$

$$\dot{G}(0^+) = 1 \quad \Rightarrow \quad -\beta(a + b) + \gamma(a - b) = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2\gamma}.$$

Letztendlich finden wir die Green'sche Funktion

$$G(t - t') = \frac{\theta(t - t')}{\gamma} e^{-\beta(t-t')} \sinh \gamma(t - t').$$

2. Green'sche Funktion I:

Wir fangen mit der Gleichung für die Green'sche Funktion an

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\beta \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right] G(t - t') = \delta(t - t').$$

Nun multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit $f(t')$

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\beta \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right] G(t - t') f(t') = \delta(t - t') f(t'),$$

und integrieren über t' . Wir benutzen die folgende Integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta(t - t') f(t') = f(t),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{d}{dt} G(t - t') f(t') = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t - t') f(t'),$$

und beachten, dass die Funktion

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t - t') f(t')$$

die ursprüngliche Gleichung erfüllt

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2\beta \frac{d}{dt} x(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t).$$

3. Erzwungener Oszillator:

Hier benutzen wir die zwei obigen Aufgaben.

- (a) In der Fall der schwachen Dämpfung lautet die Green'sche Funktion des gedämpften Oszillators

$$G(t-t') = \frac{\theta(t-t')}{\omega} e^{-\beta(t-t')} \sin \omega(t-t'), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Die Auslenkung ist dann

$$x(t) = \frac{A}{\omega} \int_0^t dt' e^{-\beta(t-t')} \sin \omega(t-t') e^{-\gamma_0 t'} = \frac{A}{\omega_0^2 - 2\beta\gamma_0 + \gamma_0^2} \left[e^{-\gamma_0 t} - e^{-\beta t} \left(\cos \omega t + \frac{\beta - \gamma_0}{\omega} \sin \omega t \right) \right].$$

Die Lösung erfüllt die gegebene Anfangsbedingungen.

- (b) In der Fall der kritischen Dämpfung lautet die Green'sche Funktion des gedämpften Oszillators

$$G(t-t') = (t-t') e^{-\beta(t-t')} \theta(t-t').$$

Die Auslenkung ist dann

$$x(t) = A \int_0^t dt' e^{-\beta(t-t')} (t-t') e^{-\gamma_0 t'} = \frac{A}{(\beta - \gamma_0)^2} \left[e^{-\gamma_0 t} - e^{-\beta t} (1 + (\beta - \gamma_0)t) \right].$$

Die Lösung erfüllt die gegebene Anfangsbedingungen.

- (c) In der Fall der starken Dämpfung lautet die Green'sche Funktion des gedämpften Oszillators

$$G(t-t') = \frac{\theta(t-t')}{\gamma} e^{-\beta(t-t')} \sinh \gamma(t-t'), \quad \gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Die Auslenkung ist dann

$$x(t) = \frac{A}{\gamma} \int_0^t dt' e^{-\beta(t-t')} \sinh \gamma(t-t') e^{-\gamma_0 t'} = A \frac{e^{-\gamma_0 t} - e^{-\beta t} \left(\cosh \gamma t + \frac{\beta - \gamma_0}{\gamma} \sinh \gamma t \right)}{\omega_0^2 - 2\beta\gamma_0 + \gamma_0^2}.$$

Die Lösung erfüllt die gegebene Anfangsbedingungen.