

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 19/20

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. NarozhnyBlatt 9
Lösungsvorschlag

1. Arbeit als Kurvenintegral:

- (a) Eine Kraft ist konservativ, wenn

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{F} = 0.$$

Für die gegebene Kraft:

$$\nabla \times \mathbf{F} = f \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{3x^2}{\alpha^2} + \frac{2y}{\alpha} & -\frac{9yz}{\alpha^2} & \frac{8xz^2}{\alpha^3} \end{vmatrix} = f \cdot \left(\frac{9y}{\alpha^2}, -\frac{8z^2}{\alpha^3}, -\frac{2}{\alpha} \right) \neq 0.$$

Die Kraft ist nicht konservativ.

- (b) Die gegebene Gerade kann man parametrisieren als

$$\mathbf{r}(t) = \alpha t(1, 1, 1), \quad t \in [0, 1].$$

Die entsprechende Arbeit ist dann

$$W = - \int \mathbf{F} d\mathbf{r} = - \int_0^1 dt \mathbf{F}(t) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t},$$

wobei

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \alpha(1, 1, 1),$$

und

$$\mathbf{F}(t) = f \cdot (3t^2 + 2t, -9t^2, 8t^3).$$

Deswegen

$$\mathbf{F}(t) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = f\alpha(8t^3 - 6t^2 + 2t),$$

und

$$W = -f\alpha.$$

- (c) Der Weg besteht aus drei Intervallen, die wir parametrisieren können als

$$\mathbf{r}_1(t) = \alpha t(1, 0, 0), \quad \mathbf{r}_2(t) = \alpha(1, t, 0), \quad \mathbf{r}_3(t) = \alpha(1, 1, t), \quad t \in [0, 1].$$

Die Arbeit entlang jedes Intervalls bewerten wir ähnlich wie bei der obigen Übung:

$$W_1 = - \int_0^1 dt \mathbf{F}_1(t) \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial t} = \alpha(1, 0, 0), \quad \mathbf{F}_1(t) = f \cdot (3t^2, 0, 0), \quad W_1 = -f\alpha;$$

$$W_2 = - \int_0^1 dt \mathbf{F}_2(t) \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial t} = \alpha(0, 1, 0), \quad \mathbf{F}_2(t) = f \cdot (3 + 2t, 0, 0), \quad W_2 = 0;$$

$$W_3 = - \int_0^1 dt \mathbf{F}_3(t) \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial t} = \alpha(0, 0, 1), \quad \mathbf{F}_3(t) = f \cdot (5, -9t, 8t^2), \quad W_3 = -\frac{8}{3}f\alpha;$$

Insgesamt

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = -\frac{11}{3}f\alpha.$$

(d) Jetzt ist der Weg

$$\mathbf{r} = \alpha(t, t^2, t^4) \quad t \in [0, 1],$$

sodass

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \alpha(1, 2t, 4t^3), \quad \mathbf{F}(t) = f \cdot (5t^2, -9t^6, 8t^9),$$

und zwar

$$W = -f\alpha \int_0^1 dt (5t^2 - 18t^7 + 32t^{12}) = -\frac{293}{156}f\alpha.$$

(e) Der Kreis parametrisieren wir als

$$\mathbf{r}(\vartheta) = \alpha(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0), \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Hier

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = \alpha(-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0), \quad \mathbf{F}(\vartheta) = f \cdot (3 \cos^2 \vartheta + 2 \sin \vartheta, 0, 0),$$

und zwar

$$W = -f\alpha \int_0^{2\pi} d\vartheta [-\sin \vartheta (3 \cos^2 \vartheta + 2 \sin \vartheta)] = 2\pi f\alpha.$$

Für eine konservative Kraft wäre das Ergebnis Null.

2. Schwingungen:

Der erzwungene Oszillator haben wir im Blatt 7 betrachten. Die entsprechende Auslenkung lautet

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad \varphi = \arctan \frac{2\beta \omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

- (a) Die mittlere Leistung $\langle P \rangle$ der Kraft F , gemittelt über eine Schwingungsperiode ist

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt P(t) = \frac{1}{T} \int_0^T dt F_0 \cos(\omega t) \dot{x}(t) = -\frac{F_0 \omega A}{T} \int_0^T dt \cos(\omega t) \sin(\omega t + \varphi),$$

und zwar

$$\langle P \rangle = \frac{\beta F_0^2 \omega^2}{m \left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right]}.$$

- (b) Die Frequenz ω der Kraft F , bei der $\langle P \rangle$ maximal ist

$$\omega = \omega_0,$$

und das entsprechende $\langle P \rangle_{\max}$ ist

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{F_0^2}{4m\beta}.$$

3. Arbeit:

- (a) Zuerst finden wir die Höhe des Aufstiegs. Da an den Anfangs- und Endpunkten des Aufstiegs die Geschwindigkeit des Körpers gleich Null ist, ist auch die Gesamtänderung seiner kinetischen Energie Null. Das bedeutet, dass die Arbeit aller Kräfte, die auf den Körper über den Weg zwischen Anfangs- und Endpunkt des Aufstiegs wirken, ebenfalls Null ist:

$$\Delta T = 0 \quad \Rightarrow \quad W = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^h (\mathbf{F} + m\mathbf{g}) d\mathbf{r} = 0.$$

Wenn wir die Aufwärtsrichtung als positiv wählen, stellen wir fest

$$\int_0^h (F_y - mg) dy = mg \int_0^h (1 - 2ay) dy = mgh(1 - ah) = 0$$

und zwar

$$h = 1/a.$$

- (b) Die Arbeit, die die Kraft $\mathbf{F}$ über die erste Hälfte des Aufstiegs leistet, beträgt

$$W_F = \int_0^{h/2} F_y dy = 2mg \int_0^{h/2} (1 - ay) dy = \frac{3mg}{4a}.$$

- (c) Die Zunahme der potentiellen Energie des Körpers im Schwerfeld der Erde über die erste Hälfte des Aufstiegs ist dann

$$\Delta V = \frac{1}{2} mgh = \frac{mg}{2a}.$$