

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 19/20

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. NarozhnyBlatt 10
Lösungsvorschlag

1. Partielle Ableitungen::

(a) Der Beweis erfolgt durch direktes Ausnutzen der Definition:

$$\begin{aligned}\nabla \times [f(r)\mathbf{r}] &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} z - \frac{\partial f}{\partial z} y, \frac{\partial f}{\partial z} x - \frac{\partial f}{\partial x} z, \frac{\partial f}{\partial x} y - \frac{\partial f}{\partial y} x \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{y}{r} z - \frac{z}{r} y, \frac{z}{r} x - \frac{x}{r} z, \frac{x}{r} y - \frac{y}{r} x \right) = 0.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\nabla \times [\varphi \mathbf{a}] &= \left(\frac{\partial \varphi a_z}{\partial y} - \frac{\partial \varphi a_y}{\partial z}, \frac{\partial \varphi a_x}{\partial z} - \frac{\partial \varphi a_z}{\partial x}, \frac{\partial \varphi a_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi a_x}{\partial y} \right) \\ &= \varphi \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \\ &\quad + \left(a_z \frac{\partial \varphi}{\partial y} - a_y \frac{\partial \varphi}{\partial z}, a_x \frac{\partial \varphi}{\partial z} - a_z \frac{\partial \varphi}{\partial x}, a_y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - a_x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\ &= \varphi \nabla \times \mathbf{a} + (\nabla \varphi) \times \mathbf{a}.\end{aligned}$$

(c) Wir verifizieren die Beziehung für die x -Komponente:

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} &= \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{a})_z}{\partial y} - \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{a})_y}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right] \\ &= -\Delta a_x + \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z \partial x} = -\Delta a_x + \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{a}.\end{aligned}$$

Mit der jeweils analogen Rechnung für die anderen Komponenten folgt die Behauptung.

(d)

$$\begin{aligned}[\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})]_x &= \frac{\partial}{\partial y} [(\mathbf{a} \times \mathbf{r})_z] - \frac{\partial}{\partial z} [(\mathbf{a} \times \mathbf{r})_y] \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \sum_{ij} \epsilon_{ijz} a_i r_j - \frac{\partial}{\partial z} \sum_{ij} \epsilon_{ijy} a_i r_j = \sum_i (\epsilon_{iyz} - \epsilon_{izy}) a_i = 2a_x.\end{aligned}$$

Analog berechnen sich die beiden anderen Komponenten. Es folgt nach Zusammenfassung:

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}.$$

2. Zentralkraft:

- (a) Die Kraft ist definiert als der Gradient des Potentials:

$$\mathbf{F} = -\nabla U.$$

In unserem Fall

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -2\alpha x, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -2\beta y.$$

Für eine Zentralkraft gilt

$$\mathbf{F} \times \mathbf{r} = 0.$$

In unserem Fall

$$\mathbf{F} \times \mathbf{r} = (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) \times (2\alpha x\mathbf{e}_x + 2\beta y\mathbf{e}_y) = 2(\beta - \alpha)xy\mathbf{e}_z \neq 0.$$

Die Kraft ist also keine Zentralkraft.

- (b) Die Äquipotentialflächen haben die Form einer Ellipse:

$$U = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \alpha x^2 + \beta y^2 = U_0,$$

und zwar

$$\frac{x^2}{\beta} + \frac{y^2}{\alpha} = \frac{U_0}{\alpha\beta}.$$

- (c) Die Flächen, für die die Größe des Kraftvektors $F = \text{const}$, haben die Form einer Ellipse:

$$F = \text{const} \quad \Rightarrow \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2} = F_0,$$

und zwar

$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = \frac{F_0^2}{4\alpha^2\beta^2}.$$

3. Impuls:

Lassen Sie den Wagen in einem Bezugssystem des Trichters fahren. Wir bezeichnen seine Masse mit m und die Geschwindigkeit mit $\mathbf{v}$.

Die Newton'sche Gleichung für das System mit einer variablen Masse lautet

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}).$$

Da die Kraft eine Konstante ist, können wir integrieren:

$$m\mathbf{v} = \mathbf{F}t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}t}{m}.$$

Da die Geschwindigkeit der Beladung konstant ist

$$m = m_0 + \mu t.$$

Deswegen

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}t}{m_0 + \mu t}.$$

Die Beschleunigung ist dann

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}}{m_0(1 + \mu t/m_0)^2}.$$

4. Drehimpuls:

Die auf den Körper wirkende Spannung $\mathbf{T}$ ist eine Zentralkraft, die immer auf O gerichtet ist, daher bleibt der Drehimpuls des Körpers (bezüglich O) erhalten. Davon folgt

$$m\omega_0 r_0^2 = m\omega r^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_0 r_0^2 / r^2.$$

Von der Newton'schen Gleichung finden wir

$$T = m\omega^2 r = m\omega_0^2 r_0^4 / r^3.$$