Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I   WS 19/20

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny

Blatt 11
Besprechung 17.01.2020

---

1. Jupiter: (15 Punkte)

Die Umlaufzeit des Jupiters um die Sonne ist 12 mal so lang wie die der Erde. Angenommen, die Planetenbahnen sind kreisförmig, finden Sie:

(a) wieviel mal der Abstand zwischen Jupiter und Sonne den Abstand zwischen Erde und Sonne übersteigt;

(b) die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Jupiters im heliozentrischen Bezugssystem.

2. Gravitation: (10 Punkte)

Ein kleiner Körper beginnt aus einer Entfernung, die dem Radius der Erdumlaufbahn entspricht, auf die Sonne zu fallen. Die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers ist im heliozentrischen Bezugssystem gleich Null. Benutzen Sie die Keplerschen Gesetze, um herauszufinden, wie lange der Körper fallen wird.

3. Sonnensystem I: (10 Punkte)

Ein Planet A bewegt sich auf einer elliptischen Umlaufbahn um die Sonne. In dem Moment, als er sich in der Entfernung r_0 von der Sonne befand, war seine Geschwindigkeit gleich v_0 und der Winkel zwischen dem Radiusvektor $\boldsymbol{r}_0$ und dem Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}_0$ war gleich α. Finden Sie die maximale und minimale Entfernung, die diesen Planeten während seiner Bahnbewegung von der Sonne trennt.

4. Sonnensystem II: (15 Punkte)

Finden Sie ungefähr die dritte kosmische Geschwindigkeit v_3, d.h. die minimale Geschwindigkeit, die einem Körper relativ zur Erdoberfläche verliehen werden muss, damit er aus dem Sonnensystem entkommt. Die Rotation der Erde um ihre eigene Achse ist zu vernachlässigen.

5. Bonus I: (25 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Gleichung gelernt (die Gleichung eines Kegelschnittes), die die geometrische Form der Planetenbahnen beschreibt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k}\left(1 + \epsilon\cos\varphi\right), \qquad k = \frac{L^2}{\gamma M m^2},$$

wobei M die Sonnenmasse, m die Planetenmasse, γ die Newton'sche Gravitationskonstante, und L der Drehimpuls seien. Der Parameter ϵ definiert die geometrische Form der Trajektorien

$$\begin{array}{lc} \epsilon < 1 & \text{Ellipse} \\ \epsilon = 1 & \text{Parabel} \\ \epsilon > 1 & \text{Hyperbel} \end{array}$$

Diese Gleichung erhielten wir als Lösung der Differentialgleichung, die den Energieerhaltungssatz beschreibt.

Alternativ kann man die allgemeine Theorie der Bewegung in einem Potential einer Zentralkraft verwenden. Wie in der Vorlesung schon besprochen, ergibt diese Theorie eine allgemeine integrale Form der Flugbahn

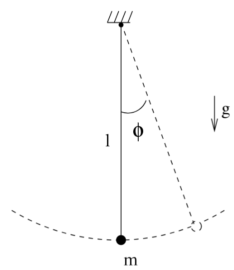
$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} dr' \frac{L/r'^2}{\sqrt{2m\left[E - L^2/(2mr'^2) - V(r')\right]}}.$$

Berechnen Sie das obige Intergal für den Fall der Gravitationskraft

$$V(\boldsymbol{r}) = -\frac{\gamma m M}{r},$$

und zeigen Sie, dass das Ergebnis im Sinne der obigen Gleichung eines Kegelschnittes ausgedrückt werden kann.

6. Bonus II: (25 Punkte)



Die Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels lautet

$$m\ddot{\varphi} + m\,\omega_0^2 \sin\varphi = 0$$

wobei $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ die Schwingungsfrequenz im Falle kleiner Auslenkungen angibt. Die Gleichung ist zwar mit elliptischen Funktionen analytisch noch lösbar, dies soll hier jedoch nicht geschehen. Stattdessen soll die Energieerhaltung ausgenutzt werden, um die Periodendauer zu bestimmen. Dazu gehen Sie wie folgt vor.

(a) Legen Sie den Koordinatenursprung in die Aufhängung des Seiles (siehe Skizze) in der (x, z)-Ebene, und beschreiben Sie sowohl die Trajektorie der Kugel auf der Kreisbahn in Polarkoordinaten, als auch deren Geschwindigkeit. Nutzen Sie $l = const.$

(b) Drücken Sie nun die kinetische Energie der Kugel $E_{kin}(\varphi)$ und die potentielle Energie $E_{pot}(\varphi)$ als Funktionen von φ aus. Wie groß ist die maximale Auslenkung φ_0 des Pendels?

(c) Nutzen Sie die Energieerhaltung um die Umkehrfunktion der Bahnkurve $t(\varphi)$ zu bestimmen, und zeigen Sie, dass für die Periodendauer gilt

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0} \int\limits_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} \ .$$

(d) Nutzen Sie $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$ und zeigen Sie, dass die Substitution $\sin x = \sin(\varphi/2)/\sin(\varphi_0/2)$ auf den Ausdruck

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 x}} \ ,$$

mit $k = \sin(\varphi_0/2)$ führt. Bei dem Integral handelt es sich gerade um das vollständige elliptische Integral $K(k)$.

(e) Bestimmen Sie die Abweichung zur harmonischen Schwingungsdauer $T_0 = 2\pi/\omega_0$, in dem Fall $k \ll 1$.

Tipp : Entwickeln Sie dazu den Integranden, und lösen Sie anschließend die resultierenden Integrale. Das Integral

$$\int dx\ \sin^2(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$$

mag nützlich sein.