Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 19/20

Prof. Dr. A. Shnirman
PD Dr. B. Narozhny

Blatt 11
Lösungsvorschlag

1. Jupiter:

Für die kreisförmige Planetenbahnen gilt

$$MR\omega^2 = F_G = \gamma \frac{MM_S}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{\gamma M_S}{R^3}}.$$

Daher ist die Periode der Planetenbewegung

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M_S}} R^{3/2}.$$

(a) Vergleichen with Jupiter und Erde:

$$\frac{T_J}{T_E} = \left(\frac{R_J}{R_E}\right)^{3/2}.$$

Deswegen

$$\frac{R_J}{R_E} = \left(\frac{T_J}{T_E}\right)^{2/3} = 12^{2/3} \approx 5.2.$$

(b) Die Geschwindigkeit finden wir als

$$v_J = \omega_J R_J, \qquad \omega_J = \sqrt{\frac{\gamma M_S}{R_J^3}}, \quad R_J = \left(T_J \frac{\sqrt{\gamma M_S}}{2\pi}\right)^{2/3}.$$

Deswegen

$$v_J = \left(\frac{2\pi\gamma M_S}{T_J}\right)^{1/3} \approx 13\,\text{km/s}.$$

Die Beschleunigung ist

$$a_J = \frac{v_J^2}{R_J} = \left(\frac{2\pi}{T_J}\right)^{4/3} (\gamma M_S)^{1/3} \approx 2.2 \times 10^{-4}\,\text{m/s}^2.$$

2. Gravitation:

Die Flugbahn des Körpers kann als eine extrem verlängerte Ellipse mit dem maximalen Abstand R (Radius der Erdumlaufbahn) und dem minimalen Abstand 0 betrachtet werden, so dass die große Halbachse $R/2$ ist. Die Zeit des Falls bezeichnen wir als τ. Dann finden wir mithilfe des Kepler'schen Gesetzes

$$\left(\frac{2\tau}{T}\right)^2 = \left(\frac{R/2}{R}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \tau^2 = \frac{T^2}{32},$$

wobei T die Periode der Erdumdrehung um die Sonne ist. Deswegen

$$\tau = T/(4\sqrt{2}) \approx 65\,\text{Tage}.$$

3. Sonnensystem I:

In den Punkten der minimalen und maximalen Entfernung von der Sonne stehen der Radiusvektor und die Geschwindigkeit des Planeten senkrecht zueinander. Mit Hilfe der Drehimpulserhaltung finden wir

$$mv_0 r_0 \sin\alpha = mvr.$$

Aus der Energieerhaltung finden wir

$$\frac{mv_0^2}{2} - \gamma\frac{mM_S}{r_0} = \frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{mM_S}{r}.$$

Unter Ausschluss der Geschwindigkeit v finden wir eine quadratische Gleichung für die Entfernung r

$$\left(v_0^2 - \frac{2\gamma M_S}{r_0}\right) r^2 + 2\gamma M_S r - v_0^2 r_0^2 \sin\alpha = 0.$$

Wir lösen nun die quadratische Gleichung und finden

$$r = r_0 \frac{1 \pm \sqrt{1-(2-\eta)\eta\sin^2\alpha}}{2-\eta}, \qquad \eta = \frac{v_0^2 r_0}{\gamma M_S}.$$

4. Sonnensystem II:

Erstens, nehmen wir an, dass die Schwerkraft der Erde vernachlässigt werden kann. Dann bewegt sich der Körper auf der Erdoberfläche um die Sonne mit der Geschwindigkeit

$$\frac{\gamma M_s m}{R_E^2} = \frac{mv_0^2}{R_E} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M_S}{R_E}},$$

wobei M_S die Masse der Sonne ist und R_E der Radius der Erdumlaufbahn ist.

Die Geschwindigkeit, die der Körper benötigt, um der Schwerkraft der Sonne zu entkommen, finden wir aus der Energieerhaltung

$$\frac{mv_e^2}{2} = \frac{\gamma M_s m}{R_E} \quad \Rightarrow \quad v_e = \sqrt{\frac{2\gamma M_S}{R_E}}.$$

Folglich ist die zusätzliche Geschwindigkeit, die der Körper auf der Erde erreichen muss, um der Schwerkraft der Sonne zu entkommen, gegeben durch

$$\delta v = v_e - v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M_S}{R_E}} \left(\sqrt{2}-1\right) = v_0 \left(\sqrt{2}-1\right).$$

Unter Berücksichtigung der Schwerkraft der Erde, aber unter Vernachlässigung der Schwerkraft der Sonne in Erdnähe (unter der Annahme, dass sich die Schwerkraft der Sonne über Entfernungen in der Größenordnung des Erdradius nicht stark verändert), finden wir die dritte kosmische Geschwindigkeit als die Geschwindigkeit, die der Körper benötigt, um der Schwerkraft der Erde mit der Geschwindigkeit δv zu entkommen (die notwendig ist, um der Schwerkraft der Sonne danach zu entkommen)

$$\frac{mv_3^2}{2} - \frac{\gamma M_E m}{R} = \frac{mv_0^2}{2} \left(\sqrt{2}-1\right)^2,$$

wobei M_E die Masse der Erde ist und R der Radius der Erde ist.

Deswegen

$$v_3 = \sqrt{2v_1^2 + \left(\sqrt{2}-1\right)^2 v_0^2} \approx 17\,\mathrm{km/s}, \qquad v_1^2 = \frac{\gamma M_E}{R}.$$

5. Bonus I:

Indem wir das Gravitationspotential in das Integral ersetzen und integrieren, finden wir

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{r_0}^{r} dr' \frac{L/r'^2}{\sqrt{2m\left[E - L^2/(2mr'^2) + \gamma m M/r'\right]}} = \arccos \frac{L/r - \gamma m^2 M/L}{\sqrt{2mE + \gamma^2 m^4 M^2/L^2}} + const.$$

Nun wählen wir die Notationen

$$p = \frac{L^2}{\gamma m^2 M}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\gamma^2 m^3 M^2}}.$$

Wir wählen auch das Koordinatensystem, sodass

$$const = 0.$$

Dann finden wir

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi.$$

6. Bonus II:

Die Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels lautet

$$m\ddot{\phi} + m\,\omega_0^2 \sin\phi = 0\,, \tag{1}$$

mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ die Schwingungsfrequenz im Falle kleiner Auslenkungen angibt. Die Gleichung (1) ist zwar mit elliptischen Funktionen analytisch noch lösbar, dies soll hier jedoch nicht geschehen. Stattdessen soll die Energieerhaltung ausgenutzt werden um die Periodendauer zu bestimmen. Dazu gehen Sie wie folgt vor.

(a) Da $x(\phi=0)=0$ sein soll und $z(\phi=0)<0$, bietet es sich an die polaren Einheitsvektoren so zu wählen

$$\boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi \end{pmatrix} \qquad\qquad \boldsymbol{e}_\phi = \frac{\partial}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} ,$$

so dass die Position der Kugel und ihre Geschwindigkeit (der Vollständigkeit halber auch deren Beschleunigung) ausgedrückt werden kann als

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= r\,\boldsymbol{e}_r \\
\dot{\boldsymbol{r}}(t) &= \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\,\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi \\
\ddot{\boldsymbol{r}}(t) &= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\phi}^2\right)\,\boldsymbol{e}_r + \left(2\dot{r}\,\dot{\phi} + r\,\ddot{\phi}\right)\,\boldsymbol{e}_\phi \,,
\end{aligned}$$

wobei wir noch zugelassen haben, dass sich der Radius variieren könnte. Verwenden wir, dass das Seil immer starr bleibt, also $r = l = const$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= l\,\boldsymbol{e}_r \\
\dot{\boldsymbol{r}}(t) &= l\,\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi \,.
\end{aligned}$$

(b) Damit lassen sich die kinetische Energie und potentielle Energie ausdrücken als

$$\begin{aligned}
E_{kin} &= \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}(t)^2 = \frac{m}{2}\,l^2\dot{\phi}^2 \\
E_{pot} &= mg\,z(t) = -mgl\,\cos\phi \,.
\end{aligned}$$

Da $E = E_{kin} + E_{pot}$ ergibt sich die maximale Auslenkung ϕ_0 (wenn alle kinetische Energie in potentielle Energie umgewandet ist) zu

$$E = -mgl\,\cos\phi_0 \qquad \rightarrow \qquad \cos\phi_0 = \frac{-E}{mgl} \,.$$

Beachten Sie, dass für die Energie in diesem Problem gilt $E \geq -mgl$, d.h. die Energie ist negativ solange $-\frac{\pi}{2} < \phi_0 < \frac{\pi}{2}$. Für größere Winkel lässt die Seilspannung nach, und die Bewegung wird etwas komplizierter.

(c) Nun isolieren wir $\frac{d\phi}{dt}$ in der Energieerhaltung, und integrieren die Gleichung mittels Seperation der Variablen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
E = E_{kin} + E_{pot} &= \frac{m}{2}\,l^2\dot{\phi}^2 - mgl\,\cos\phi \\
\rightarrow \qquad \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 &= \frac{2}{ml^2}\,(E + mgl\,\cos\phi) = 2\omega_0^2\,(\cos\phi - \cos\phi_0) \\
\frac{\pm 1}{\sqrt{2}\omega_0}\int_{\phi(0)}^{\phi(t)} \frac{d\phi'}{\sqrt{\cos\phi' - \cos\phi_0}} &= \int_0^t dt' = t(\phi)\,.
\end{aligned}$$

Das (± 1) sollte man korrekter Weise durch $\operatorname{sign}(\phi(t) - \phi(0))$ ersetzen. Interessieren wir uns jedoch nur für die Periodendauer, so nutzen wir aus, dass die Auslenkung aus der Ruhelage $\phi = 0$ bis $\phi = \phi_0$ gerade einer Viertel Periode entspricht. Damit wird das Integral

$$T = \frac{4}{\sqrt{2}\omega_0}\int_0^{\phi_0} \frac{d\phi'}{\sqrt{\cos\phi' - \cos\phi_0}} = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0}\int_0^{\phi_0} \frac{d\phi'}{\sqrt{\cos\phi' - \cos\phi_0}} \,.$$

(d) Nutzt man zunächst die Relation $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\frac{\alpha}{2})$, findet man

$$T = \frac{2}{\omega_0}\int_0^{\phi_0} \frac{d\phi'}{\sqrt{\sin^2(\frac{\phi_0}{2}) - \sin^2(\frac{\phi'}{2})}} \; . \tag{2}$$

Um die Substitution $\sin x = \frac{\sin(\frac{\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi_0}{2})}$ durchzuführen berechnen wir zunächst das Integralmaß, d.h. wir differenzieren

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x &= \frac{d}{dx}\frac{\sin(\frac{\phi(x)}{2})}{\sin(\frac{\phi_0}{2})} \\
\cos x &= \frac{1}{2}\frac{\cos(\frac{\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi_0}{2})}\frac{d\phi}{dx} \\
\rightarrow \qquad d\phi &= dx\,\frac{2\cos(x)\,\sin(\frac{\phi_0}{2})}{\cos(\frac{\phi}{2})} = dx\,\frac{2\cos(x)\,\sin(\frac{\phi_0}{2})}{\sqrt{1-\sin^2(\frac{\phi}{2})}} = dx\,\frac{2\cos(x)\,\sin(\frac{\phi_0}{2})}{\sqrt{1-\sin^2(\frac{\phi_0}{2})\sin^2(x)}} \; .
\end{aligned}$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass $\cos(\frac{\phi}{2}) > 0$ auf dem Intervall $0 < \phi < \phi_0$ wobei weiterhin $\phi_0 < \frac{\pi}{2}$ gelten soll. Ebenfalls gilt $\sin(\frac{\phi_0}{2}) > 0$ auf dem Intervall. Die Integralgrenzen werden mit $x(\phi) = \arcsin\left(\frac{\sin(\frac{\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi_0}{2})}\right)$ zu $x(\phi = 0) = 0$ und $x(\phi = \phi_0) = \frac{\pi}{2}$. Setzen wir alles in (2) ein, ergibt sich

$$T = \frac{2}{\omega_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin(\frac{\phi_0}{2})\sqrt{1-\sin^2(x)}}\frac{2\cos(x)\,\sin(\frac{\phi_0}{2})}{\sqrt{1-\sin^2(\frac{\phi_0}{2})\sin^2(x)}} = \frac{4}{\omega_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2(x)}} \; , \tag{3}$$

mit $k = \sin(\frac{\phi_0}{2})$.

(e) Der Einfachheit halber entwickeln wir die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}} \approx 1 + \frac{1}{2}\,y \; ,$$

wobei $y = k^2\sin^2(x)$. Damit lautet das Integral im Grenzfall kleiner Auslenkungen

$$T = \frac{4}{\omega_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\,\left(1 + \frac{1}{2}\,k^2\sin^2(x)\right) = \frac{2\pi}{\omega_0} + \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{k^2}{4} = T_0\,\left(1 + \frac{1}{4}k^2\right) \; .$$

Wie zu erwarten war wird die Periodendauer energieabhängig. Diese Tatsache kann man auch deutlich dem Bild 1 entnehmen.

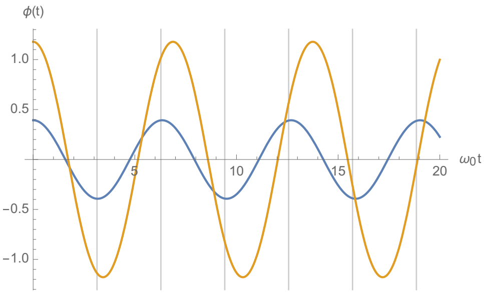

Abbildung 1: Exakte Lösung für $\phi(t)$ für $\phi_0 = \frac{\pi}{8}$ (blau) und für $\phi_0 = \frac{3\pi}{8}$ (orange). Die Gitterlinien markieren Vielfache von π. Während die blaue Kurve noch annähernd eine Periode $\frac{2\pi}{\omega_0}$ hat, weicht orangene Kurve schon deutlich ab.