

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 19/20**Prof. Dr. A. Shnirman****Blatt 12****PD Dr. B. Narozhny****Lösungsvorschlag**

1. Gravitation I:

Wir bezeichnen die Frequenz der Satellitenbewegung mit ω

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma M_E}{R^3}},$$

wobei M_E die Masse der Erde ist und R der Radius der Umlaufbahn ist.

Für die zwei Satelliten haben wir:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\gamma M_E}{r^3}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\gamma M_E}{(r - \delta r)^3}}.$$

Die relative Winkelgeschwindigkeit ist gegeben durch

$$\Omega_{\pm} = \omega_2 \pm \omega_1.$$

Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden minimalen Abständen ist dann

$$T_{\pm} = \frac{2\pi}{\Omega_{\pm}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M_E}} \frac{1}{(r - \delta r)^{-3/2} \pm r^{-3/2}}.$$

Da $\delta r \ll r$, man kann das Ergebnis mithilfe einer Entwicklung vereinfachen

$$T_{\pm} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{\gamma M_E}} \frac{1}{3\delta r/(2r) + \delta_{\pm}}, \quad \delta_+ = 2, \quad \delta_- = 0.$$

Die resultierenden Werte sind 4.5 Tage und 50 Minuten.

2. Gravitation II:

Hier benutzen wir Energieerhaltung:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{\gamma m M_E}{R_E} = -\frac{\gamma m M_E}{R_E + h}.$$

Die Freifallbeschleunigung auf der Oberfläche der Erde ist

$$g = \frac{\gamma M_E}{R_E^2}.$$

Deswegen

$$h = \frac{v_0^2 R_E}{2gR_E - v_0^2}.$$

Der Nullpunkt des Denominators ergibt die zweite kosmische Geschwindigkeit

$$v_2 = \sqrt{2gR_E}.$$

Für $v_0 > v_2$ ist h selbsterständlich unendlich.

3. Runge-Lenz-Vektor:

(a) Betrachten wir die Zeitableitung des Runge-Lenz-Vektors:

$$\dot{\mathbf{A}} = \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} + \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{L}} + (\nabla V \cdot \dot{\mathbf{r}}) \mathbf{r} + V \dot{\mathbf{r}}.$$

Im Zentralpotential

$$\dot{\mathbf{L}} = 0,$$

und

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{m} \frac{dV}{dr} \mathbf{e}_r.$$

Dies hat zur Folge

$$\dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{m} \frac{dV}{dr} \mathbf{e}_r \times \mathbf{L} + \frac{dV}{dr} \mathbf{e}_r (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) + V \dot{\mathbf{r}}$$

$$\dot{\mathbf{r}} \left(r \frac{dV}{dr} + V \right) = 0,$$

für

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

mit

$$\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}.$$

(b) Den Betrag des Runge-Lenz-Vektors erhalten wir aus

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} + V(r) \mathbf{r}] \cdot [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} + V(r) \mathbf{r}].$$

Beim Zentralpotential ist $\dot{\mathbf{r}} \perp \mathbf{L}$

$$\mathbf{A}^2 = \dot{\mathbf{r}}^2 \mathbf{L}^2 + V(r) [\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) + (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r}] + V^2(r) \mathbf{r}^2.$$

Mit

$$(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \frac{L^2}{m}$$

folgt weiter

$$\mathbf{A}^2 = \frac{2L^2}{m} \left[V(r) + \frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2} \right] + V^2(r) \mathbf{r}^2,$$

und letztendlich

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\alpha^2 + \frac{2L^2 E}{m}}.$$

(c) Betrachten wir den Skalar

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} + V(r)r^2 = \frac{L^2}{m} + V(r)r^2 = |\mathbf{A}|r \cos \varphi.$$

Wir setzen

$$\epsilon = \frac{|\mathbf{A}|}{\alpha} = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2}}, \quad k = \frac{L^2}{m\alpha},$$

dann gilt

$$r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos \varphi}.$$

Für $E < 0$ finden wir $\epsilon < 1$ (Ellipse), für $E > 0$: $\epsilon > 1$ (Hyperbel).