

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 19/20**Prof. Dr. A. Shnirman****Blatt 13****PD Dr. B. Narozhny****Lösungsvorschlag**

1. Impulserhaltung I:

Betrachten Sie zuerst den hinteren Buggy und den Mann. Vor dem Sprung war der Gesamtimpuls dieses Systems $(m + M)v_0$. Nach dem Sprung beträgt der Impuls des Buggys Mv_r , während der Impuls des Mannes beträgt $m(u + v_r)$. Jetzt verwenden wir die Impulserhaltung

$$(m + M)v_0 = Mv_r + m(u + v_r) \quad \Rightarrow \quad v_r = v_0 - u \frac{m}{m + M}.$$

Betrachten Sie nun den vorderen Buggy. Bevor der Mann auf ihm landete, war sein Impuls Mv_0 . Nachdem der Mann gelandet ist, betrug der Impuls des Systems $(m + M)v_f$. Auch hier verwenden wir die Impulserhaltung

$$Mv_0 + m(u + v_r) = (m + M)v_f.$$

Wenn wir das obigen Ergebnis für v_r ersetzen, finden wir

$$v_f = v_0 + u \frac{mM}{(m + M)^2}.$$

2. Impulserhaltung II:

Da wir den Wasserwiderstand vernachlässigen, gibt es keine äußeren Kräfte, die auf das System aus Mensch und Floß einwirken. Daher ändert sich der Gesamtimpuls des Systems nicht und bleibt Null (da es am Anfang keine Bewegung gab). Daher finden wir die Geschwindigkeit der Floßes $v(t)$:

$$m[v'(t) + v(t)] + Mv(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = -\frac{m}{m + M}v'(t).$$

Integriert man die Geschwindigkeit über die Zeit, so erhält man die vom Floß zurückgelegte Strecke:

$$\mathbf{L} = -\mathbf{L}' \frac{m}{m + M}, \quad L = L' \frac{m}{m + M}.$$

Dieses Ergebnis kann auch durch die Berücksichtigung der Position des Massenschwerpunktes erzielt werden. In Abwesenheit von äußeren Kräften ändert sich die Bewegung (oder der Mangel eines solchen) des Massenschwerpunktes eines Systems nicht. Wir setzen die Änderung der Position des Massenschwerpunkts auf Null,

$$m(\mathbf{L} + \mathbf{L}') + M\mathbf{L} = 0,$$

und finden gerade das obigen Ergebnis.

Die auf das Floß wirkende Kraft finden wir als die zeitliche Ableitung seines Impulses

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} [Mv(t)] = -\frac{mM}{m+M} \frac{d\mathbf{v}'(t)}{dt}.$$

3. Inelastischer Zusammenstoß:

Zunächst betrachten wir die Kollision zwischen der Kugel und dem Körper. Angenommen, dies geschieht schnell, betrachten wir dies als unelastische Zusammenstoß, bei dem nicht die Energie, sondern der Impuls erhalten ist. Vor der Kollision befand sich der Körper in Ruhe und der Gesamtimpuls des Systems wurde durch den Impuls der Kugel, mv_0 , gegeben. Nach dem Stoß, der Impuls des Körpers mit der Kugel im Inneren ist $(m+M)v$, wobei v die Geschwindigkeit des Körpers direkt nach dem Stoß. Daher

$$mv_0 = (m+M)v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{m}{m+M} v_0 \approx \frac{m}{M} v_0.$$

Nach dem Stoß sind die Schwerkraft und die Spannung der Federn die einzigen Kräfte, die auf den Körper wirken. Die letztere ist immer orthogonal zur Geschwindigkeit und leistet daher keine Arbeit. Somit ist die mechanische Energie des Systems erhalten. Wir betrachten den Zeitpunkt direkt nach dem Stoß als Anfangspunkt dieser Bewegung. Die Anfangsenergie ist dann die kinetische Energie des Körpers (mit der Kugel). Als Endpunkt betrachten wir den Punkt, an dem die Federn den maximalen Winkel mit der Vertikalen bilden. An diesem Punkt ist die Gesamtenergie die potentielle Energie. Nun betrachten wir die Energieerhaltung

$$\frac{Mv^2}{2} = Mgh,$$

wo die vom Körper erreichte Höhe

$$h = L(1 - \cos \theta) = 2L \sin^2(\theta/2).$$

Als Ergebnis finden wir die Geschwindigkeit des Körpers direkt nach dem Stoß

$$v = 2\sqrt{gL} \sin(\theta/2),$$

und daher ist die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel

$$v_0 = 2\frac{m+M}{m} \sqrt{gL} \sin(\theta/2) \approx \frac{2M}{m} \sqrt{gL} \sin(\theta/2).$$

Nun vergleichen wir die kinetische Energie vor und nach dem Stoß. Die kinetische Energie der Kugel vor dem Stoß beträgt

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Die kinetische Energie des Körpers (mit der Kugel) nach dem Stoß beträgt

$$E_1 = \frac{(m + M)v^2}{2} \approx \frac{m^2 v_0^2}{2M}.$$

Der Unterschied zwischen den beiden ist genau die dissipierte Energie

$$\Delta E = E_0 - E_1 \approx \frac{mv_0^2}{2} \left(1 - \frac{m}{M}\right).$$

Deswegen, der Anteil der anfänglichen kinetischen Energie der Kugel, der sich in Wärme verwandelte ist

$$\eta = \frac{\Delta E}{E_0} \approx 1 - \frac{m}{M}.$$