

Übungsbetreuung: Matthias Kerner (matthias.kerner@kit.edu) (Raum: 12/16)

Aufgabe 1: Differentiation - Fall mit Luftwiderstand

4P

Wird beim freien Fall der Luftwiderstand in Form einer dem Quadrat der Fallgeschwindigkeit v proportionalen Reibungskraft kv^2 berücksichtigt, so erhält man die folgende funktionale Abhängigkeit der Fallgeschwindigkeit v vom Fallweg s :

$$v(s) = \sqrt{\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{2ks}{m}}\right)} \quad \text{mit } s \geq 0.$$

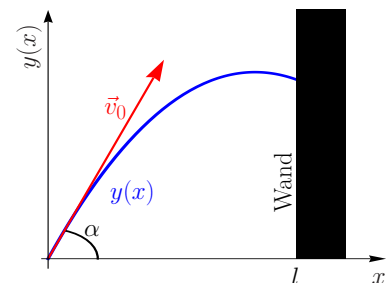
Hierbei bezeichnet m die Masse des fallenden Körpers, g die Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche, und k sei ein Reibungskoeffizient.

- (a) **2P** Aufgrund der Abhängigkeit $s(t)$, also dem Zusammenhang zwischen Weg s und Zeit t , lässt sich die obige Funktion auch als Funktion von der Zeit t in der Form $v(s(t))$ darstellen. Zeigen Sie für die Beschleunigung $a(t) = \frac{dv}{dt}$ dann die Beziehung $a(s) = v \frac{dv}{ds}$.
Hinweis: Nutzen Sie die Kettenregel.
- (b) **2P** Berechnen Sie nun $\frac{dv}{ds}$, und bestimmen Sie so $a(s)$. Fertigen Sie eine Skizze der Ortsabhängigkeit $a(s)$ an.

Aufgabe 2: Differentiation - Wasserstrahl

5P

Bei einer Feuerwehrrübung kommt eine Wasserspritze zum Einsatz, aus welcher der Wasserstrahl mit fester Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = |\vec{v}_0|$ austritt. Ziel der Aufgabe ist es, den Winkel α zwischen Boden und Wasserspritze so zu bestimmen, dass eine Wand in der Entfernung l möglichst weit oben getroffen wird. Dazu wähle man ein kartesisches Koordinatensystem, in welchem der Wasserstrahl bei $(0, 0)$ gemäß der Abbildung austritt.



- (a) **1P** In x -Richtung bewegt sich der Wasserstrahl mit konstanter Geschwindigkeit, in y -Richtung kommt zusätzlich der freie Fall hinzu, so dass gilt:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t, \quad y(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Stellen Sie den Zusammenhang $y(x)$ auf, indem Sie die Zeitabhängigkeit t eliminieren. Es ergibt sich eine Parabel (Wurfparabel) als Bahnkurve.

- (b) **2P** Berechnen Sie nun die Höhe $h = y(l)$ bei der Wand, und fassen Sie h als Funktion des Winkels α auf, also $h(\alpha)$. Es gilt nun das Maximum der Funktion $h(\alpha)$ zu bestimmen. Berechnen Sie hierzu die Ableitung $h'(\alpha) = \frac{dh(\alpha)}{d\alpha}$ bezüglich des Winkels α , für die Sie erhalten sollten:

$$h'(\alpha) = \frac{l}{v_0^2} \frac{v_0^2 \cos(\alpha) - gl \sin(\alpha)}{\cos^3(\alpha)}.$$

- (c) 2P Bestimmen Sie den Winkel α_0 , für den die Höhe $h(\alpha)$ maximal wird, und zeigen Sie $h_{max} = h(\alpha_0) = \frac{v_0^4 - g^2 l^2}{2gv_0^2}$. Geben Sie für $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $l = 15\text{m}$ und $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ die Größen α_0 und h_{max} an.

Aufgabe 3: Differentiation - Taylorentwicklung

6P

Die Taylorentwicklung einer Funktion ist ein wichtiges Hilfsmittel in der Physik. Wir beschränken uns in dieser Aufgabe auf Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dabei wird eine Funktion f um einen x -Wert x_0 durch ein Polynom approximiert. Dazu sei f bei $x = x_0$ n -mal differenzierbar und $f^{(k)}(x_0)$ sei die k -te Ableitung von f bei $x = x_0$, insbesondere schreiben wir $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$. Für $x \approx x_0$ ist dann

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Ist f bei x_0 unendlich oft differenzierbar, können wir $n \rightarrow \infty$ gehen lassen. Dies ergibt eine Taylorreihe. Für viele (genauer analytische) Funktionen gilt die vorherige Relation dann exakt für alle x , für die die unendliche Summe auf der rechten Seite konvergiert. Bestimmen Sie für nachfolgende Funktionen die n -te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$ beliebig), und geben Sie die Taylorreihe für $x_0 = 0$ an. Für welche Werte von x konvergieren die Taylorreihen? (Die letzte Frage wird nicht bewertet.)

- (a) 2P $f(x) = e^x$.
 (b) 2P $f(x) = \sin x$.
 (c) 2P $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Aufgabe 4: Vektoren - Levi-Civita-Symbol

5P

In kartesischen Koordinaten ist das Skalarprodukt zweier dreidimensionaler Vektoren \vec{a} und \vec{b} durch $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$ gegeben. Hierbei wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, d.h. über doppelt auftretende Indizes $i \in \{1, 2, 3\}$ wird summiert. Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ hat folgende Komponenten $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$. Hierbei kommt das total antisymmetrische Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} mit $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ zur Anwendung, für welches gilt $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji}$ mit $\epsilon_{123} = +1$.

- (a) 3P Zeigen Sie, dass $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$ gilt. Hierbei ist das Kronecker-Symbol definiert durch $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und 0 für $i \neq j$.
 (b) 1P Beweisen Sie unter Verwendung von ϵ_{ijk} die Beziehung $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.
 (c) 1P Beweisen Sie unter Verwendung von ϵ_{ijk} die BAC-CAB-Regel $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.