Ausgabe: Mo, 15.11.21
Abgabe: Mo, 22.11.21
Besprechung: Fr, 26.11.21

Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Matthias Kerner (matthias.kerner@kit.edu) (Raum: 12/16)

Aufgabe 1: Verlorener Schuh **6P**

Sie waren am letzten Wochenende auf der Mess' im Karussell. Dieses bestand aus einer Scheibe mit Radius R, die sich mit gewisser Winkelgeschwindigkeit ω um ihren Mittelpunkt dreht. Sie nahmen im Abstand $r < R$ Platz und verloren zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $\vec{r}(0) = (r, 0)^T$ Ihren Schuh, welcher reibungsfrei auf der glatten Oberfläche gleitet

(a) 2P Ausgehend von Ihrer Bewegung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

stellen Sie die Bewegung des Schuhs $\vec{r}_S(t)$ in kartesischen Koordinaten dar. Berechnen Sie für Ihre Bewegung den Tangenteneinheitsvektor und den Normaleneinheitsvektor.

(b) 3P Nun berücksichtigen wir einen Basiswechsel auf die soeben berechneten Einheitsvektoren, welche den Mittelpunkt des Karussells als Ursprung haben. Berechnen Sie in der neuen Basis $\hat{\vec{r}}_S(t) = (\hat{x}_S(t), \hat{y}_S(t))^T$ für die Bewegung des Schuhs, indem Sie $\hat{x}_S(t)\vec{\tau}(t) + \hat{y}_S(t)\vec{n}(t) = \vec{r}_S(t)$ lösen. Skizzieren Sie $\hat{\vec{r}}_S(t)$ (für $r = 1$, $\omega = 1$) in der neuen Basis.

(c) 1P Berechnen Sie die Länge der Strecke, die der Schuh auf der Oberfläche zurücklegt, als Funktion der Zeit. Arbeiten Sie also in der neuen Basis.

Aufgabe 2: Drehung im $\mathbb{R}^3$ **6P**

Gegeben sei die Matrix

$$O = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ 2 & \sqrt{3} & -3 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) 2P Zeigen Sie, dass O eine Drehmatrix ist, also dass $O^T O = \mathbb{1}$.

(b) 2P Bestimmen Sie die Drehachse.
Hinweis: Die Drehachse $\vec{a}$ bleibt bei der Drehung unverändert: $O\vec{a} = \vec{a}$. Aus dieser Bedingung können Sie $\vec{a}$ bestimmen.

(c) 2P Bestimmen Sie den Drehwinkel.
Hinweis: Betrachten Sie dazu die Transformation eines Vektors, der senkrecht auf $\vec{a}$ steht.

Aufgabe 3: Länge und Winkel bei Drehungen $\boxed{\textbf{3P}}$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind zwei beliebige Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ sowie der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bei Drehungen des Koordinatensystems invariant sind.

Aufgabe 4: Determinanten $\boxed{\textbf{5P}}$

Die Determinante einer 2×2-Matrix M lässt sich mit Hilfe des zweidimensionalen Levi-Civita-Symbols ϵ_{ij} schreiben als

$$\det M = \epsilon_{ij} M_{1i} M_{2j}.$$

Hierbei gilt wieder die Einstein'sche Summenkonvention.

(a) $\boxed{\text{1P}}$ Zeigen Sie, dass die Komponenten des Levi-Civita-Symbols ϵ_{ij} (für $i, j \in \{1, 2\}$) durch die Bedingungen

$$\epsilon_{12} = 1 \quad \text{und} \quad \epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$$

vollständig festgelegt sind.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Zeigen Sie

$$\epsilon_{kl} M_{ik} M_{jl} = (\det M)\epsilon_{ij}.$$

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Zeigen Sie, dass für beliebige 2×2-Matrizen A und B gilt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Verwenden Sie dazu Ihr Ergebnis aus (b) und die Indexformel für Matrixprodukte:

$$(AB)_{ij} = A_{ik} B_{kj}.$$