Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Matthias Kerner (matthias.kerner@kit.edu) (Raum: 12/16)

Aufgrund der neuen Coronaverordnung wird die Saalübung (Mittwochs, 16:00 Uhr) ab sofort nur noch online stattfinden. Die Zugangsdaten hierzu werden auf Ilias veröffentlicht. Die Vorlesung wird weiterhin in Präsenz stattfinden.

Aufgabe 1: Kugelkoordinaten — 6P

In kartesischen Koordinaten lautet ein beliebiger Vektor $\vec{r}$ im $\mathbb{R}^3$ ausgedrückt durch Kugelkoordinaten r, θ und ϕ

$$\vec{r}(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi\sin\theta \\ r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

mit $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$.

(a) $\boxed{2P}$ Bestimmen Sie die drei Einheitsvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\phi$ und $\vec{e}_\theta$, indem Sie analog zu Aufgabe 4 von Übungsblatt 6 vorgehen: Den Einheitsvektor $\vec{e}_i$ erhalten Sie, indem sie die partielle Ableitung $\frac{\partial \vec{r}}{\partial i}$ normieren. Die Einheitsvektoren sind also die Tangenteneinheitsvektoren entlang der Koordinatenlinien.

(b) $\boxed{1P}$ Zeigen Sie, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\phi$ und $\vec{e}_\theta$ orthogonal aufeinander stehen.

(c) $\boxed{1P}$ Wie lautet die Transformationsmatrix von einem Vektor $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)^T$ in kartesischen Koordinaten auf den Vektor ausgedrückt in Kugelkoordinaten $\vec{k}' = (k_r, k_\theta, k_\phi)^T$? *Hinweis:* Arbeiten Sie mit $k_r\vec{e}_r + k_\theta\vec{e}_\theta + k_\phi\vec{e}_\phi$ in kartesischen Koordinaten. Bestimmen Sie zuerst die inverse Matrix. Die Matrix ist orthogonal.

(d) $\boxed{2P}$ Zeigen Sie ausgehend von einem zeitabhängigen Ortsvektor beginnend im Ursprung $\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(t)$, dass die Geschwindigkeit gegeben ist durch

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\vec{e}_\phi \quad .$$

Hinweis: Berechnen Sie die Zeitableitung von $\vec{e}_r$ und betrachten Sie r, θ und ϕ als zeitabhängige Größen.

Aufgabe 2: Differentialgleichung - Ameise auf Gummiband — 7P

Eine Ameise befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an einem Ende eines Gummibandes der Länge l_0, das bei $x = 0$ an einer Wand befestigt ist. Die Ameise läuft auf dem Gummiband mit einer Geschwindigkeit v_A auf das andere Ende zu, das mit der Geschwindigkeit v_G von der Wand wegbewegt wird. Berücksichtigt man sowohl die Geschwindigkeit der Ameise auf dem Gummiband als auch die Geschwindigkeit, mit der das Gummiband gestreckt wird, erhält man für die Gesamtgeschwindigkeit der Ameise

$$\dot{x}(t) = v_A + v_G\frac{x(t)}{l_0 + v_g t}. \tag{1}$$

Wir wollen nun die Funktion $x(t)$ bestimmen, die diese Gleichung erfüllt. Gleichungen dieser Art, die eine gesuchte Funktion $x(t)$ und deren Ableitungen enthalten werden als Differentialgleichungen bezeichnet und werden uns in Zukunft häufig begegnen.

(a) $\boxed{\text{1P}}$ Begründen Sie, dass die Geschwindigkeit der Ameise durch Gleichung (1) gegeben ist und zeigen Sie, dass für $v_A = 0$ die Funktion $x(t) = a(l_0 + v_G t)$ mit $a = const.$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(b) $\boxed{\text{3P}}$ Um die Differentialgleichungen für $v_A \neq 0$ zu lösen, ersetzen wir nun die Konstante a des vorherigen Aufgabenteils durch eine Funktion $a(t)$. Setzen Sie den Ansatz $x(t) = a(t) \cdot (l_0 + v_G t)$ in Gleichung (1) ein und zeigen Sie, dass dies zu einer Gleichung für $\dot{a}(t)$ führt, aus der Sie durch Integration $a(t)$ bestimmen können. Führen Sie die Integration aus und passen Sie die Integrationskonstante so an, dass $x(0) = 0$. Damit erhalten Sie die Lösung der Differentialgleichung,

$$x(t) = \frac{v_A}{v_G}(l_0 + v_G t) \log \frac{l_0 + v_G t}{l_0}. \tag{2}$$

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie die Ableitung $\dot{x}(t)$ der in Aufgabenteil (b) bestimmten Lösung (Gleichung (2)) und zeigen Sie, dass diese die Differentialgleichung (1) erfüllt.

(d) $\boxed{\text{1P}}$ Welche Zeit benötigt die Ameise, um das andere Ende zu erreichen? Verwenden Sie hierfür $v_A = 1\,\text{cm/s}$, $v_G = 10\,\text{cm/s}$, $l_0 = 1\,m$.

Aufgabe 3: Differentialgleichung - Separation der Variablen $\boxed{\textbf{7P}}$

Wir betrachten nun gewöhnliche (d.h. nur von einem Parameter x abhängige) Differentialgleichung (DGL) erster Ordnung (d.h. nur die erste Ableitung nach x tritt auf) der Form

$$g(y(x))y'(x) = f(x) \quad \text{mit} \quad y'(x) = \tfrac{dy(x)}{dx}\,.$$

Lösen der DGL bedeutet wieder die Ermittlung der Funktion $y(x)$ unter Beachtung eines bestimmten Anfangswertes $y(x_0) = y_0$ (Anfangswertproblem).

(a) $\boxed{\text{2P}}$ Begründen Sie, dass eine Lösung obiger DGL gegeben ist durch

$$G(y) = F(x) + C \quad \text{und damit} \quad y(x) = G^{-1}(F(x) + C)\,,$$

wobei G und F Stammfunktionen von g und f sind. C ist eine beliebige Integrationskonstante. *Hinweis:* Es benötigt keinen mathematischen Beweis. Erläutern Sie in zwei Sätzen den Zusammenhang zur Kettenregel.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Bestimmen Sie die Lösung für den konkreten Fall der DGL $y'(x) = -xy(x)$ für den Anfangswert $y(1) = 2$. *Hinweis:* Bringen Sie die Gleichung erst auf obige Form. Schreiben Sie $\ln|y|$ und hängen Sie sich nicht an mathematischen Feinheiten auf.

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Für gewöhnliche DGLen erster Ordnung lässt sich ein Richtungsfeld zeichnen, indem man in der x-y-Ebene für ausgewählte Punkte einen Pfeil mit der zugehörigen Steigung $y'(x)$ zeichnet. Skizzieren Sie das Richtungsfeld für die DGL $y'(x) = -xy(x)$ für ganzzahlige Punkte (x, y) mit $x \in [-3, 3]$ und $y \in [-3, 3]$ in der x-y-Ebene. Zeichnen Sie auch die Lösung der vorherigen Teilaufgabe ein.

(d) $\boxed{\text{1P}}$ Leiten Sie nun die in Aufgabe 2a angegebene Lösung der DGL (1) für $v_A = 0$ her, indem Sie obiges Verfahren anwenden.