Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Matthias Kerner (matthias.kerner@kit.edu) (Raum: 12/16)

Sonderregelung Vorleistung/Klausurzulassung: Student(inn)en, die auf Blatt 1-7 $(50\% - x)$ der Punkte mit $x \in [0\%, 15\%] \geq 0$ erreicht haben, können die Klausurzulassung noch erlangen, indem sie auf Blatt 8-14 mindestens $(50\% + x)$ der Punkte erhalten!

Aufgabe 1: Lineare Differentialgleichungen **6P**

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit gewöhnlichen, linearen (d.h. alle Ableitungen treten linear auf) DGLen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese sind von der Form $y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) + b(x) = 0$. Die Koeffizienten a_i sind konstant, wobei die Gleichung mit $b(x) = 0$ homogene Gleichung genannt wird.
Wir wollen die Lösungen der Differentialgleichung $y''(x) + 4y'(x) + 3y + 9x^2 = 0$ bestimmen.

(a) 2P Betrachten Sie zunächst die homogene DGL $y''(x) + 4y'(x) + 3y = 0$ und zeigen Sie, dass der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ auf eine quadratische Gleichung mit zwei Lösungen $\lambda_{1,2}$ führt. Die allgemeine Lösungen dieser homogenen DGL sind beliebige Linearkombinationen der beiden gefundenen Lösungen, $y_{hom}(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$.

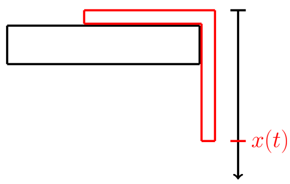
(b) 2P Bestimmen Sie nun die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL, indem Sie zunächst eine Funktion $y_{part}(x)$ (eine „partikuläre“ Lösung) bestimmen, die die DGL erfüllt, und hierzu die allgemeine Lösung der homogenen DGL hinzuaddieren.
Hinweis: Verwenden Sie Polynome als Ansatz für $y_{part}(x)$.

(c) 1P Bestimmen Sie die Konstanten A, B so dass, $y'(0) = 0$ und $y(0) = -\frac{20}{3}$.

(d) 1P Überprüfen Sie Ihre Lösung, indem Sie diese in die DGL einsetzen.

Aufgabe 2: Seil über Tischkante **5P**

Ein Seil der Länge l und Masse m gleite über die Tischkante reibungsfrei ab, wobei es anfänglich mit der Länge x_0 über die Tischkante hänge. Es wirkt die Gewichtskraft auf den nach unten hängenden Teil des Seiles.



(a) 3P Parametrisieren Sie die Masse $m(t)$ des nach unten hängenden Teiles als Funktion von $x(t)$ und zeigen Sie, dass für die Gewichtskraft $F(t) = m\frac{g}{l}x(t)$ gilt. Zeigen Sie, dass dies auf die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) = \frac{g}{l}x(t)$$

führt. Lösen Sie die Gleichung mit einem Ansatz wie aus vorheriger Aufgabe unter den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$. *Hinweis:* Sie erhalten, mal wieder, die hyperbolischen Funktionen. Man beachte, dass die beschleunigte Masse m zeitlich konstant ist.

(b) 2P Wie groß ist die Geschwindigkeit, wenn das Ende des Seils gerade über die Kante rutscht.

Aufgabe 3: Wurf mit Reibung $\boxed{5P}$

Ein Ball der Masse m wird mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = v_0(\cos\theta, 0, \sin\theta)$ abgeworfen. Auf den Ball wirke die Gewichtskraft mit Erdbeschleunigung $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ und Stoke'sche Reibungskraft $\vec{F}_R = -\alpha\dot{\vec{r}}$. Bei $t = 0$ befindet sich der Ball am Ursprung. Wir wollen nun die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ des Balls bestimmen.

(a) $\boxed{1P}$ Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Balls auf.

(b) $\boxed{3P}$ Die Bewegungsgleichung des Balls hängt nicht explizit von $\vec{r}(t)$ ab und wir können diese daher mit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ in eine Differentialgleichung 1. Ordnung in $v(t)$ überführen. Bestimmen Sie die Lösung dieser Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$.
Hinweis: Bestimmen Sie wie in Aufgabe 1 zunächst die allgemeine Lösung der homogengen DGL (also mit $g = 0$) und addieren Sie hierzu eine Lösung $\vec{v}_{part}(t)$ der inhomogenen Gleichung. Eine mögliche partikuläre Lösung $\vec{v}_{part}(t)$ ist hier ein geeignet gewählter, zeitlich konstanter Vektor.

(c) $\boxed{1P}$ Integrieren Sie $\vec{v}(t)$ um die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ zu erhalten.

Aufgabe 4: Geschwindigkeit in Zylinderkoordinaten $\boxed{4P}$

Ein Massenpunkt bewege sich auf der Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \left(\rho_0\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)\cos\omega t, \rho_0\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)\sin\omega t, h_0\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)\right) .$$

(a) $\boxed{1P}$ Bestimmen Sie $\vec{r}(t)$ in Zylinderkoordinaten.

(b) $\boxed{1P}$ Skizzieren Sie die Bahn für $t \leq t_0$. Innerhalb welcher geometrischen Form bewegt sich der Massenpunkt?

(c) $\boxed{1P}$ Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t)$ in kartesischen Koordinaten, d.h. direkt aus dem gegebenen Vektor. Was passiert mit dem Betrag der Geschwindigkeit für $t \to t_0$?

(d) $\boxed{1P}$ Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t)$ direkt in Zylinderkoordinaten, beginnend vom Resultat aus (a). Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (c).