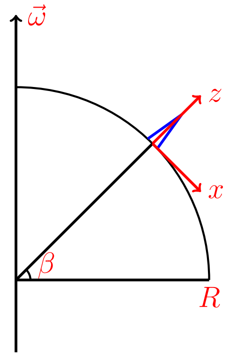
Gesamtpunktzahl: **20P (25P)**

Übungsbetreuung: Matthias Kerner (matthias.kerner@kit.edu) (Raum: 12/16)

Aufgabe 1: Scheinkräfte - Eiffelturm **7P**

An der Spitze des Eiffelturms in Paris (Höhe $h = 300\,\text{m}$) ist ein Lot aufgehängt, das mit seiner Spitze den Boden im Punkt P berührt. O sei der Bodenpunkt, der auf der Verbindungslinie von der Turmspitze zum Erdmittelpunkt liegt. Der Erdradius sei R, die Erdachse sei $\vec{\omega}$ mit Winkelgeschwindigkeit $|\vec{\omega}| = 2\pi f$, und β sei der Breitengrad von Paris. Zahlenwerte: $R \approx 6.34 \cdot 10^6\,\text{m} \gg h$, $\beta \approx 49°$, $f = \frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60\,\text{s}}$



(a) $\boxed{2P}$ Wie weit ist P von O entfernt und in welche Richtung ist P gegenüber O verschoben? *Hinweis:* Legen Sie das lokale Koordinatensystem wie nebenstehend gezeigt. Drücken Sie zuerst den Betrag der Zentrifugalbeschleunigung durch ω, R und β aus.

Wir lassen nun einen Körper von der Turmspitze frei fallen. Der Körper erfahre während des Falls keine Reibungskräfte, falle also idealisiert im Vakuum.

(b) $\boxed{2P}$ Stellen Sie für den frei fallenden Körper die Bewegungsgleichungen in x, y und z-Richtung des lokalen Koordinatensystems auf.
Hinweis: Berücksichtigen Sie in der Coriolisbeschleunigung $\vec{b}_c$ nur die v_z-Komponente der Geschwindigkeit des Körpers.

(c) $\boxed{3P}$ In welcher Richtung und Entfernung vom Punkt O trifft ein von der Turmspitze aus losgelassener frei fallender Körper auf dem Boden auf? *Hinweis:* Lösen Sie zuerst die Gleichung für z und bestimmen Sie so $v_z(t)$.

Lösung der Aufgabe 1

(a) Die Zentrifugalbeschleunigung ist gegeben durch

$$\vec{b}_s = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Dabei ist $\vec{r}$ der Verbindungsvektor Erdmittelpunkt - Eiffelturm mit $|\vec{r}| = R$. Nun mache man sich klar, dass $(\vec{\omega} \times \vec{r})$ einen Vektor gibt der in y-Richtung des lokalen Systems zeigt. Dieser hat die Länge $\omega R \cos\beta$. Dann liefert $\omega \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ einen Vektor, der senkrecht auf $\vec{\omega}$ in der Zeichenebene liegt und nach aussen zeigt. Der Winkel zwischen ω und $(\vec{\omega} \times \vec{r})$ ist per Konstruktion 90°. Es ist daher

$$|\vec{b}_s| = \omega^2 R \cos\beta$$

und projiziert auf die x- und z-Komponente des lokalen Koordinatensystems

$$\vec{b}_s = \omega^2 R \cos\beta (\sin\beta, 0, \cos\beta)^T \,.$$

Die Gesamtbeschleunigung im lokalen Koordinatensystem ist $\vec{b} = \vec{b}_s - g\vec{e}_z$. Wir erhalten daher für die Auslenkung

$$p = \overline{PO} = h\tan\alpha = h\frac{|b_x|}{|b_z|}$$

weil die resultierende Kraft sich genau aus den Beschleunigungen ergibt. Es folgt

$$p = h\frac{\omega^2 R\cos\beta\sin\beta}{|g - \omega^2 R\cos^2\beta|}.$$

Einsetzen der Zahlen liefert 50.8 cm Südauslenkung, in Richtung x.

(b) Als vereinfachende Annahme gehen wir davon aus, dass $\vec{v} = (0,0,v_z)^T$, wie angegeben. Zwar entwickelt der Körper auch eine Geschwindigkeitskomponente in x- und y-Richtung, jedoch bleiben diese klein $v_x, v_y \ll v_z$. Damit erhalten wir für die Coriolisbeschleunigung

$$\vec{b}_c = -2\omega \times \dot{\vec{r}} = -2(\omega_y v_z, -\omega_x v_z, 0).$$

Nun hat ω im lokalen Koordinatensystem keine y-Komponente, und die x-Komponente ist $-\omega\cos\beta$. Somit ist

$$\vec{b}_c = 2\omega(0, -v_z\cos\beta, 0).$$

Mit Erdbeschleunigung und Zentrifugalbeschleunigung $\vec{b}_s = \omega^2 R\cos\beta(\sin\beta, 0, \cos\beta)^T$ erhalten wir

$$\vec{b} = \vec{b}_s + \vec{b}_c - g\vec{e}_z \,.$$

Somit sind die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= b_x = \omega^2 R\cos\beta\sin\beta \\
\ddot{y} &= b_y = -2\omega v_z\cos\beta = -2\omega\dot{z}\cos\beta \\
\ddot{z} &= b_z = \omega^2 R\cos^2\beta - g
\end{aligned}$$

Offenbar hängt nur $\ddot{y}$ von einer anderen Komponente ab, die daher zuerst gelöst werden und in $\ddot{y}$ eingesetzt werden kann.

(c) Wir erhalten in z-Richtung nach zweimaliger Integration unter Beachtung von $\dot{z}(0) = 0$ und $z(0) = h$:

$$z(t) = h + \tfrac{1}{2}(\omega^2 R\cos^2\beta - g)t^2$$

Am Boden ist $z(T) = 0$ und damit ergibt sich für die Aufschlagzeit T:

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g - \omega^2 R\cos^2\beta}}$$

Außerdem ist die Geschwindigkeit $v_z(t) = \dot{z}$ gegeben durch

$$v_z(t) = \dot{z} = (\omega^2 R \cos^2 \beta - g)t.$$

Als Nächstes lösen wir die Bewegungsgleichung für x. Hier ist aufgrund von $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ einfach

$$x(t) = \frac{1}{2}\omega^2 R \cos\beta \sin\beta t^2 \,.$$

Es ist also

$$x(T) = h\frac{\omega^2 R \cos\beta \sin\beta}{g - \omega^2 R \cos^2\beta}.$$

Dies ist identisch zu dem Resultat der Auslenkung des Pendels in x-Richtung. Zuletzt bleibt die y-Komponente. Auch hier ist wieder $y(0) = \dot{y}(0) = 0$. Wir benutzen außerdem das Resultat für $v_z(t)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= -2\omega v_z \cos\beta = -2\omega b_z t \cos\beta \\
\dot{y} &= -\omega \cos\beta b_z t^2 \\
y &= -\frac{1}{3} b_z \omega \cos\beta t^3 = \frac{1}{3}(g - \omega^2 R \cos^2\beta)\omega \cos\beta t^3.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$y(T) = \frac{\omega \cos\beta}{3} \frac{(2h)^{3/2}}{\sqrt{g - \omega^2 R \cos^2\beta}}.$$

Setzt man die Zahlenwerte ein, so erhält man wieder $x(T) \approx 50.8\,\mathrm{cm}$ Südauslenkung. Dazu kommen hier nun noch $y(T) \approx 7.5\,\mathrm{cm}$ Ostauslenkung, die der Corioliskraft zuzuordnen sind.

Aufgabe 2: Anwendung des Nabla-Operators **5P**

In dieser Aufgabe untersuchen wird die Wirkung des Nabla-Operators

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T$$

auf den Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ und dessen Betrag $r = |\vec{x}|$. $\vec{a}$ sei ein konstanter Vektor und $f(r)$ ist eine beliebige Funktion, die nur vom Betrag r abhängt.

(a) 1P Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\varphi$ für die skalare Funktion $\varphi(\vec{x}) = x_1 x_2 x_3$ in Richtung $\vec{a} = (1, 1, 1)$.

(b) 2P Berechnen Sie die Gradienten

$$\vec{\nabla} r, \quad \vec{\nabla}\frac{1}{r}, \quad \vec{\nabla} f(r).$$

(c) $\boxed{2\text{P}}$ Berechnen Sie die Divergenzen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{x}, \quad \vec{\nabla} \cdot (r\vec{a}), \quad \vec{\nabla} \cdot (r^n \vec{x}).$$

Lösung der Aufgabe 2

(a) Wir berechnen den Gradienten und erhalten

$$\vec{\nabla}\varphi = (x_2 x_3, x_1 x_3, x_1 x_2)\ .$$

Nach Skalarmultiplikation mit $\vec{a}$ finden wir

$$\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\varphi = x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2\,.$$

(b) Wir berechnen zuerst die Ableitung nach einem x_i:

$$\begin{aligned} \partial_i r &= \partial_i \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_i}{r} && (1) \\ \partial_i \frac{1}{r} &= \partial_i \left(r^{-1}\right) = -r^{-2}\, \partial_i r = -\frac{x_i}{r^3}\,, \\ \partial_i f(r) &= f'(r)\, \partial_i r = \frac{f'(r) x_i}{r}\,. && (2) \end{aligned}$$

Damit sind die Gradienten gerade gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} r &= \frac{\vec{r}}{r} = \hat{\vec{r}}\,, \\ \vec{\nabla} \frac{1}{r} &= -\frac{\vec{r}}{r^3}\,, \\ \vec{\nabla} f(r) &= f'(x) \frac{\vec{r}}{r}\,. \end{aligned}$$

(c) Für die gesuchten Ausdrücke erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{x} &= \partial_i x_i = 1 + 1 + 1 = 3\,, && (3) \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} r) &= \partial_i (a_i r) = a_i \partial_i r \overset{(1)}{=} \frac{a_i x_i}{r} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{r}\,, \\ \vec{\nabla} \cdot (r^n \vec{x}) &= \partial_i (x_i r^n) = (\partial_i x_i) r^n + x_i \partial_i r^n \overset{(2)(3)}{=} 3r^n + x_i \cdot n r^{n-1} \frac{x_i}{r} \\ &= 3r^n + n r^n = (3+n) r^n\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Gradient $\boxed{\textbf{3P}}$

Wir untersuchen zwei skalare Felder

$$\phi_1(\vec{r}) = e^{-r^2}\,, \qquad \phi_2(\vec{r}) = \frac{x}{r^2+a^2} \quad (a = \text{const})\,.$$

Berechnen Sie die Gradienten $\vec{\nabla}\phi_1(\vec{r})$ und $\vec{\nabla}\phi_2(\vec{r})$. Skizzieren sie das Feld $\vec{\nabla}\phi_1(\vec{r})$ in der x–y–Ebene. $\vec{\nabla}\phi_2(\vec{r})$ kann als Summe $\alpha(\vec{r})\vec{e}_x + \beta(\vec{r})\vec{r}$ geschrieben werden. Skizzieren Sie die beiden Teilfelder in der x–y–Ebene.

Lösung der Aufgabe 3

Für die Berechnung der Gradienten setzen wir $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und können damit komponentenweise zuerst für $\phi_1(\vec{r})$ ausrechnen:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^{-x^2-y^2-z^2} = -2xe^{-r^2}$$

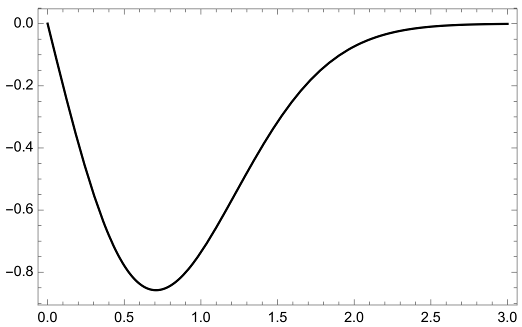
Dies folgt für die anderen Komponenten gleichermaßen, so dass wir erhalten

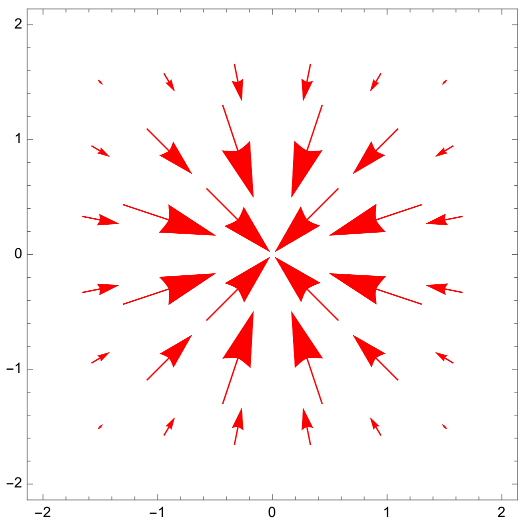
$$\vec{\nabla}\phi_1(\vec{r}) = -2e^{-r^2}(x, y, z)^T = -2\vec{r}e^{-r^2}.$$

Um dies vernünftig zu zeichnen, ist es sinnvoll den Einheitsvektor in $\vec{r}$ Richtung zu nutzen und zu schreiben

$$\vec{\nabla}\phi_1(\vec{r}) = \vec{e}_r(-2re^{-r^2}).$$

Nachfolgend ist die Funktion $-2re^{-r^2}$ als Funktion von r gezeigt, sowie das daraus resultierende Feld:





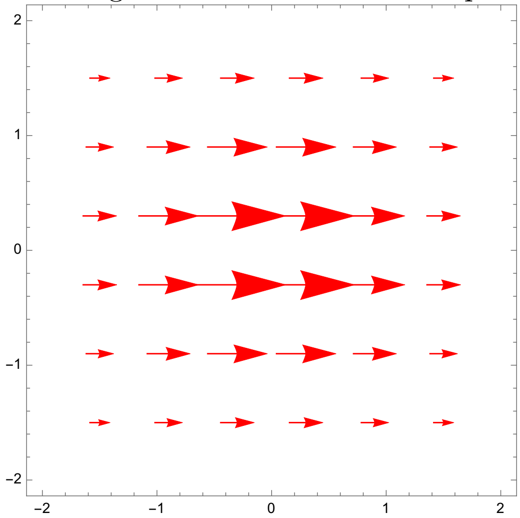
Im zweiten Teil der Teilaufgabe wiederholen wir die Prozedur für $\phi_2(\vec{r})$ und erhalten:

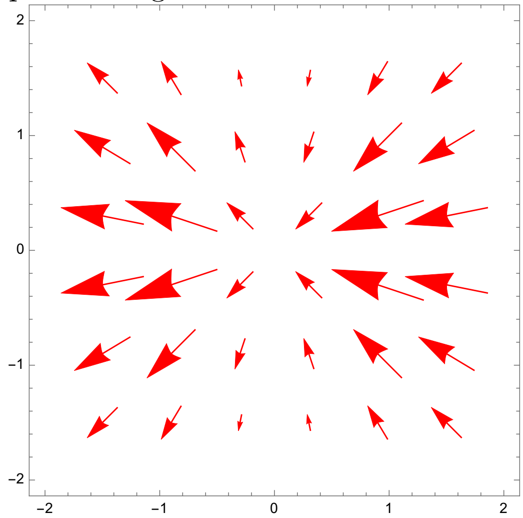
$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_2}{\partial x} &= \frac{1}{r^2+a^2} + \frac{-x}{(r^2+a^2)^2}2x = \frac{r^2+a^2-2x^2}{(r^2+a^2)^2} \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial y} &= -\frac{x}{(r^2+a^2)^2}2y = \frac{-2xy}{(r^2+a^2)^2} \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial z} &= \frac{-2xz}{(r^2+a^2)^2}
\end{aligned}$$

Wie angegeben teilen wir dies auf in zwei Komponenten und schreiben

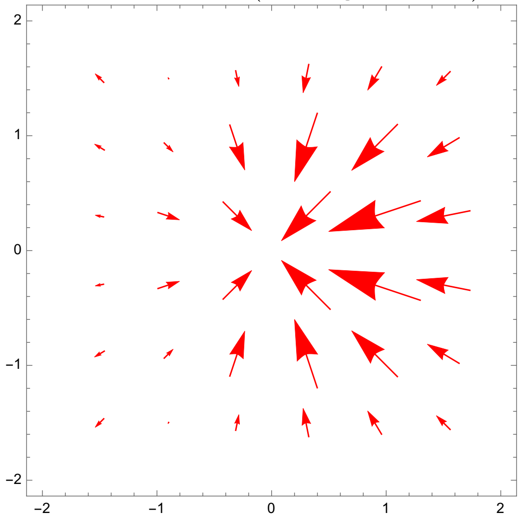
$$\vec{\nabla}\phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{r^2+a^2}\vec{e}_x - \frac{2x}{(r^2+a^2)^2}\vec{r}.$$

Nachfolgend sind die beiden Komponenten für $a = 1$ graphisch dargestellt:





Die Kombination (nicht gefordert!) ist dann:



Aufgabe 4: Typische Klausuraufgabe – Verständnisfragen $\boxed{\textbf{4P}}$

Beantworten Sie die nachfolgenden Fragen in wenigen Sätzen oder mit wenigen Formeln:

(a) $\boxed{1\text{P}}$ Zeigen Sie mit Hilfe des Levi-Civita-Tensors, dass $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ist, falls $\vec{a} = c\vec{b}$ mit $c \in \mathbb{R}$, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

(b) $\boxed{1\text{P}}$ Gegeben sei eine Drehmatrix R sowie ein beliebiger Vektor $\vec{x}$. Welche der folgenden Eigenschaften sind für diese erfüllt? Geben Sie bei jeder Eigenschaft an, ob sie richtig oder falsch ist. Ein Beweis oder Gegenbeispiel ist nicht erforderlich.
i) $R^T = R$, ii) $R\vec{x} = \vec{x}$, iii) $|R\vec{x}| = |\vec{x}|$,
iv) der i-te Spaltenvektor steht senkrecht auf den j-ten Zeilenvektor für $i \neq j$.

(c) $\boxed{1\text{P}}$ Wieviele Anfangsbedingungen sind notwendig, um eine Lösung der DGL $y''(x) = 5$ eindeutig zu bestimmen?

(d) $\boxed{1\text{P}}$ Was zeichnet ein Inertialsystem aus?

Lösung der Aufgabe 4

(a) Für den Fall $\vec{a} = c\vec{b}$ gilt offenbar $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k = c\epsilon_{ijk} b_j b_k$. Unter Berücksichtigung der Summation über j und k treten die Summanden $b_j b_k$ und $b_k b_j$ mit entgegengesetztem Vorzeichen auf. Somit entfällt die Summe.

(b) *Anmerkung:* Die hier angegebenen Beweise und Gegenbeispiele sind nicht gefordert. Pro falscher Antwort sollte bei diesem Aufgabenteil ein halber Punkt abgezogen werden, da man bereits durch Raten im Schnitt 2 richtige Antworten hat.

i) falsch; Gegenbeispiel ist z.B. die Drehmatrix im $\mathbb{R}^2$: $R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, für die offensichtilich $R^T \neq R$. Die korrekte Beziehung wäre $R^{-1} = R^T$.

ii) falsch; Gegenbeispiel ist wieder die Drehmatrix im $\mathbb{R}^2$, angewandt auf einen Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$.

iii) richtig; Beweis: $|R\vec{x}| = \sqrt{(R\vec{x}) \cdot (R\vec{x})} = \sqrt{(R\vec{x})^T (R\vec{x})} = \sqrt{\vec{x}^T R^T R \vec{x}} = \sqrt{\vec{x}^T \vec{x}} = |\vec{x}|$.

iv) falsch; Gegenbeispiel ist wieder die Drehmatrix im $\mathbb{R}^2$.
Die Spaltenvektoren einer Drehmatrix stehen senkrecht aufeinander und analoges gilt auch für die Zeilenvektoren. Die Zeilenvektoren sind jedoch nicht orthogonal zu den Spaltenvektoren.

(c) 2 Anfangsbedingungen, z.B. Werte von y' und y für ein festes x.

(d) In einem Inertialsystem bewegt sich ein Körper, auf den keine äußere Kraft wirkt, geradlinig und gleichförmig oder verharrt in Ruhe.

Aufgabe 5: Typische Klausuraufgabe – Bahnkurve $\boxed{\textbf{6P}}$

Gegeben ist eine mit dem dimensionslosen Parameter t parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^3$

$$\vec{r}(t) = \left(\sqrt{2}\cos t + \sin t - t, \sqrt{2}\cos t - \sin t + t, \sqrt{2}\sin t + \sqrt{2}t\right).$$

Berechnen Sie

(a) $\boxed{2\text{P}}$ den Tangenteneinheitsvector $\vec{\tau}$,

(b) $\boxed{1\text{P}}$ die Länge $s(t)$ der Kurve vom Punkt $t = 0$ aus gemessen,

(c) $\boxed{2\text{P}}$ den Krümmungsradius R.

(d) $\boxed{1\text{P}}$ Welche Gestalt hat die Kurve?

Lösung der Aufgabe 5

(a) Für die Geschwindigkeit erhalten wir

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(-\sqrt{2}\sin t + \cos t - 1, -\sqrt{2}\sin t - \cos t + 1, \sqrt{2}\cos t + \sqrt{2}\right).$$

Um den Tangenteneinheitsvektor zu erhalten, müssen wir diese noch normieren. Wir berechnen daher

$$\begin{aligned}|\dot{\vec{r}}(t)|^2 =&2\sin^2 t + \cos^2 t + 1 - 2\sqrt{2}\sin t\cos t + 2\sqrt{2}\sin t - 2\cos t\\ &+ 2\sin^2 t + \cos^2 t + 1 + 2\sqrt{2}\sin t\cos t - 2\sqrt{2}\sin t - 2\cos t\\ &+ 2\cos^2 t + 2 + 4\cos t\\ =&8\,.\end{aligned}$$

Der Tangenteneinheitsvektor $\vec{\tau}$ ist daher

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2}\sin t + \cos t - 1, -\sqrt{2}\sin t - \cos t + 1, \sqrt{2}\cos t + \sqrt{2}\right).$$

(b) Wir erhalten sofort

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(t)|dt = \int_0^t 2\sqrt{2}dt = 2\sqrt{2}\,t\,.$$

(c) Den Krümmungsradius R erhalten wir aus der Beziehung

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\tau}}{dt} &= \frac{v(t)}{R(t)}\vec{n}\\ \to \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| &= \frac{v(t)}{R(t)}|\vec{n}| = \frac{v(t)}{R(t)}.\end{aligned}$$

Für die Ableitung des Tangenteneinheitsvektors erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\tau}(t)}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2}\cos t - \sin t, -\sqrt{2}\cos t + \sin t, -\sqrt{2}\sin t\right)\\ \to \left|\frac{d\vec{\tau}(t)}{dt}\right|^2 &= \frac{1}{8}\left(2\cos^2 t + \sin^2 t + 2\sqrt{2}\cos t\sin t + 2\cos^2 t + \sin^2 t - 2\sqrt{2}\cos t\sin t + 2\sin^2 t\right)\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Der Krümmungsradius ist somit

$$R(t) = \frac{v(t)}{\left|\frac{d\vec{\tau}(t)}{dt}\right|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1/2}} = 4.$$

(d) Der konstante Krümmungsradius deutet auf einen Kreis. Jedoch entwickelt sich die Kurve z.B. für $t \to \infty$ entlang der Richtung $(-1, 1, \sqrt{2})$ weiter. Vermutlich handelt es sich um eine Spirale. Wir zerlegen $\vec{r}(t)$ in drei Anteile proportional zu $\cos t$, $\sin t$, t,

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \cos t\,(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) + \sin t\,(1, -1, \sqrt{2}) + t\,(-1, 1, \sqrt{2})\\ &= 2\left(\cos t\,(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) + \sin t\,(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) + t\,(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})\right)\\ &= 2(\hat{e}_1\cos t + \hat{e}_2\sin t + \hat{e}_3 t)\,.\end{aligned}$$

Wir sehen, dass $\hat{e}_1 \perp \hat{e}_2 \perp \hat{e}_3$. Damit haben wir eine Kreisbewegung in der $\hat{e}_1$-$\hat{e}_2$-Ebene mit Radius 2 überlagert mit einer linearen Bewegung in $\hat{e}_3$-Richtung, also eine Spirale.