Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Matthias Kerner (matthias.kerner@kit.edu) (Raum: 12/16)

Aufgabe 1: Ringförmige Raumstation — 3P

Eine ringförmige Raumstation wird in Rotation um den Mittelpunkt versetzt, um den Astronauten möglichst erdähnliche Bedingungen zu geben: die Zentrifugalbeschleunigung soll gleich der Erdbeschleunigung g sein und die Coriolisbeschleunigung soll bei einer typischen Bewegung ($v = 1\,\mathrm{ms}^{-1}$) höchstens $0.1\,g$ betragen.

(a) 2P Berechnen Sie den Radius und die Periodendauer eines Umlaufs der Raumstation.

(b) 1P In Stanley Kubricks *2001: A Space Odyssey* hat eine solche Raumstation einen Durchmesser von $900\,\mathrm{ft} \approx 300\,\mathrm{m}$. Wie lang ist dort die Umlaufdauer und wie groß ist die typische Coriolisbeschleunigung?

Aufgabe 2: Gradient, Divergenz, Rotation — 6P

(a) 2P Fisch Rainer mag keinen Strudel in seinem Becken. Ihm wird instantan schlecht, wenn die Geschwindigkeitsfelder des Wassers nicht wirbelfrei sind ($\vec{\nabla} \times \vec{v}_i(\vec{r}) \neq 0$). Untersuchen Sie ob sich Rainer für die Geschwindigkeitsfelder

$$\vec{v}_1(\vec{r}) = (0, x, 0)^T\,, \qquad \vec{v}_2(\vec{r}) = (0, \sin y, 0)^T\,, \qquad \vec{v}_3(\vec{r}) = (yz, xz, xy)^T$$

übergeben muss. Zeichnen Sie auch die Geschwindigkeitsfelder $\vec{v}_1(\vec{r})$ und $\vec{v}_2(\vec{r})$ in der x–y–Ebene. Berechnen Sie die Divergenzen $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i(\vec{r})$. Welches Geschwindigkeitsfeld ist in Wasser realisierbar? Nur $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i(\vec{r}) = 0$ garantiert "Volumenerhaltung"/Quellenfreiheit, also in ein beliebiges Volumen geflossenes Wasser fließt an anderer Stelle wieder heraus (Gaußscher Integralsatz).

(b) 2P Zeigen Sie, dass für beliebige Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r})$ und Skalarfelder $\phi(\vec{r})$ gilt

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})) = 0\,, \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi(\vec{r})) = 0\,.$$

Gemäß zweiter Aussage sind Felder, die aus einem Skalarfeld (Potential) über den Gradient gewonnen werden, wirbelfrei. *Hinweis:* Diese Aufgabe ist einfacher mit Indexschreibweise, z.B. $(\vec{\nabla} \times \vec{A})_i = \epsilon_{ijk} \nabla_j A_k$. Zweite partielle Ableitungen seien vertauschbar.

(c) 2P Dreht man den Spieß um, so kann man fragen ob für nachfolgende vektorwertige Felder ein skalares Feld (Potential) existiert, so dass $\vec{F}_i(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi_i(\vec{r})$ gilt. Falls existent, ermitteln Sie $\phi_i(\vec{r})$ bis auf eine Konstante für die Fälle

$$\vec{F}_1(\vec{r}) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y\,, \qquad \vec{F}_2(\vec{r}) = xy\vec{e}_x + xy\vec{e}_y\,, \qquad \vec{F}_3(\vec{r}) = (x^2 + y^2)\vec{e}_x + 2xy\vec{e}_y\,.$$

Hinweis: Das Minuszeichen ist in Anlehnung an den Zusammenhang zwischen Potentialen und Kraftfeldern gewählt. Berechnen Sie zuerst $\vec{\nabla} \times \vec{F}_i(\vec{r})$ und betrachten Sie die vorherige Teilaufgabe um etwas zur Existenz von $\phi_i(\vec{r})$ zu sagen.

Aufgabe 3: Satz von Stokes **6P**

Der Satz von Stokes erleichtert die Berechnung eines Flächenintegrals durch Überführung in ein Linien-/Wegintegral. Für ein vektorwertiges Feld $\vec{F}$ lautet er

$$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A} = \int_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s}\,. \tag{1}$$

Hierbei ist A eine gerichtete Fläche und $\vec{A}$ ein Vektor, welcher senkrecht auf der Fläche steht. ∂A ist die Umrandung der Fläche und $\vec{s}$ eine Parametrisierung derselben. Sie dürfen für das konkrete Beispiel

$$\vec{F}(\vec{r}) = (-y, x, x^2 + y^2 - z^2)^T$$

den Satz von Stokes überprüfen, indem Sie beide Seiten getrennt in mehreren Schritten berechnen. Die Fläche A sei eine Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius R in der x–y–Ebene.

(a) $\boxed{\text{1P}}$ Berechnen Sie zuerst den Flächeninhalt $\int_{x^2+y^2\leq R^2} dxdy$ von A, indem Sie von kartesischen zu Polarkoordinaten wechseln. *Hinweis:* Sie benötigen die Jacobi-Determinante gemäß des Vorlesungsskriptes.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie nun die linke Seite von Gl. 1, indem Sie $d\vec{A} = (0, 0, dxdy)^T$ setzen und die vorherige Teilaufgabe nutzen.

(c) $\boxed{\text{1P}}$ Für die rechte Seite von Gl. 1 benötigen Sie eine Parametrisierung des Weges entlang des Randes ∂A. Parametrisieren Sie den Weg mit einer Bahnkurve $\vec{s}(t)$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$.

(d) $\boxed{\text{2P}}$ Drücken Sie nun $\vec{F}$ in der x–y–Ebene durch Polarkoordinaten aus ($z = 0$) und substituieren Sie $d\vec{s} = \dot{\vec{s}}dt$. Damit können Sie die rechte Seite als eindimensionales Integral über t berechnen. Sie sollten Identisches zur linken Seite erhalten.

Aufgabe 4: Konservatives Kraftfeld **5P**

Gegeben sei ein konservatives Kraftfeld in kartesischen Koordinaten ($\vec{r} = (x, y, z)^T$)

$$\vec{F}(\vec{r}) = (x + 1, z^2, 2yz)^T\,.$$

(a) $\boxed{\text{1P}}$ Zeigen Sie, dass die Rotation verschwindet.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Es existiert ein Potential $V(\vec{r})$, so dass $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$. Ermitteln Sie $V(\vec{r})$. Berechnen Sie den Potentialunterschied zwischen $\vec{r}_1 = (4, 0, 0)^T$ und $\vec{r}_2 = (0, 0, 4)^T$.

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie die verrichtete Arbeit $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$ entlang einer Gerade von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ und zeigen Sie, dass diese gerade dem Potentialunterschied aus (b) entspricht. *Hinweis:* Es braucht wieder eine Parametrisierung $\vec{s}(t)$ des Weges.