

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Lösung 0

MITCHELL WHITTAM, DAVID DAMS, BENEDIKT ZERULLA

Besprechung: 04.11.2022

Die meisten Aufgaben können ohne längere Rechnung gelöst werden!

1. Differentialrechnung

Berechnet werden sollen verschiedene Ableitungen, dabei empfiehlt es sich immer die Ausdrücke genau anzusehen. Zum einen nach welcher Variable eigentlich differenziert werden soll, zum anderen ob der Ausdruck nicht vereinfacht werden kann.

(a) Berechnen Sie die folgenden Ableitungen:

(i) $\frac{d}{dx} e^{\ln x} = \frac{d}{dx} x = 1$

(ii) $\frac{d}{dz} \frac{1}{(x+z^2)} = -\frac{2z}{(x+z^2)^2}$

(b) Bestimmen Sie den stationären Punkt x_0 der Funktion

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad f(x) \neq \pm\infty.$$

Ist x_0 ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt? Warum?

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}.$$

Für einen stationären Punkt x_0 ,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= 0 \\ \implies x_0 &= 0, \end{aligned}$$

oder

$$e^{-x_0^2} = 0.$$

Aber $x \neq \infty$, deswegen gilt nur $x_0 = 0$.

Um zu zeigen, ob x_0 ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt ist, kann man die zweite Ableitung $f''(x)$ bei x_0 verwenden. Das heißt,

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \implies f''(x_0) = -2 < 0 \quad \therefore x_0 \text{ ist ein Maximum.}$$

2. Integralrechnung I

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\int_0^a \frac{dx}{x+a} = \ln(a+a) - \ln a = \ln(2).$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin x \cos x = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin 2x = -\frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$

(Substitution oder partielle Integration sind auch möglich).

(c) $\int_0^{\ln 2} dx e^x = e^x \Big|_0^{\ln 2} = 2 - 1 = 1.$

3. Vektorrechnung

(a) Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{a} = (1, 2, 1)^T$ und $\mathbf{b} = (0, 1, 1)^T$

(i) Welche Längen haben $\mathbf{a}$ bzw. $\mathbf{b}$?

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{6}, \quad \text{analog} \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{2}.$$

(ii) Welchen Wert hat der Winkel α zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$?

Wir nutzen $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$. Damit ist

$$\cos \alpha := \cos(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

(iii) Sind $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ linear abhängig?

Nein. Wir haben gezeigt, dass zwischen den Vektoren ein Winkel $\alpha \neq 0$ besteht, die beiden Vektoren sind also nicht parallel.

(iv) Wie ist die Basisdarstellung von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ in der Basis

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Basisdarstellung in der Standardbasis lässt sich direkt ablesen

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

4. Vektorprodukt (Kreuzprodukt) in $\mathbb{R}^3$

Gegeben sind zwei zueinander parallele Vektoren $\mathbf{c} = (0, x+1, 2)^T$ und $\mathbf{d} = (0, 1, x)^T$. Bestimmen Sie x .

Die Vektoren sind zueinander parallel $\implies \mathbf{c} \times \mathbf{d} = \mathbf{0}$. Deswegen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} &= \mathbf{0} \\ \implies x^2 + x - 2 &= 0 \\ \implies (x-1)(x+2) &= 0 \\ \implies x = 1 \text{ oder } x = -2. \end{aligned}$$