Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL
MITCHELL WHITTAM, DAVID DAMS, BENEDIKT ZERULLA

Blatt 1
Abgabe: 09.11.2022 um 12:00 Uhr

Zur Bearbeitung der Programmieraufgaben dieses Blattes können Sie die Datei blatt01_vorlage.ipynb *als Vorlage nutzen.*

1. Bahnkurven in 2D — 6 Punkte

Wir betrachten einen Massenpunkt in einer Ebene, dessen Bewegung durch die folgenden Gleichungen beschrieben wird:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_x t), \quad y(t) = y_0 \cos(\omega_y t + \phi_y)$$

Die Bahnkurve eines solchen Massepunkts beschreibt eine sogenannte *Lissajous-Figur*, die wir im Folgenden genauer betrachten wollen.

(a) [2 Punkte] Mit Jupyter Notebook, plotten Sie die Bahnkurve für $x_0 = y_0 = 1$ und

Gleiche Frequenzen, mit

$$\omega_x = \omega_y \quad \text{und} \qquad \text{(i)} \quad \phi_y = \pi/2 \qquad \text{(ii)} \quad \phi_y = \pi/6$$

Kommensurable Frequenzen:

$$\phi_y = \pi/2 \quad \text{und} \qquad \text{(iii)} \quad \omega_x/\omega_y = 1/2 \qquad \text{(iv)} \quad \omega_x/\omega_y = 1/3$$

In allen Plots sollte mindestens eine vollständige Periode $0 \leq t \leq \max\left(\frac{2\pi}{\omega_x}, \frac{2\pi}{\omega_y}\right)$ zu sehen sein.

(b) [4 Punkte] Bestimmen Sie für die Parameter $x_0 = y_0, \omega_x = \omega_y$ und $\phi_y = \pi/2$ die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$, die Beschleunigung $\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t))$, sowie die Längen $r(t) = |\mathbf{r}(t)|$, $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ und $a(t) = |\mathbf{a}(t)|$.

2. Bahnkurve in 3D — 5 Punkte

Geben ist die Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \\ ht \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r, \omega, h = \text{const.}$$

(a) [4 Punkte] Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$, die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$, sowie die Längen $r(t) = |\mathbf{r}(t)|$, $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ und $a(t) = |\mathbf{a}(t)|$.

(b) [1 Punkt] Mit Jupyter Notebook, plotten Sie die Bahnkurve für $r = 1, \omega = 1, h = 10$ und $0 \leq t \leq 10$.

3. Kronecker-Delta und Levi-Civita-Pseudotensor 6 Punkte

In dieser Aufgabe soll es um das Kronecker-Delta gehen, das in den Vorlesungsfolien (Kapitel 2.1.1) näher erklärt wird.

Auch hier verwenden wir die Einsteinsche Summenkonvention, bei der implizit über identische Indizes summiert wird, und lassen entsprechend das Summenzeichen weg.

(a) [2 Punkte] Es kann gezeigt werden das gilt

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}.$$

Überzeugen Sie sich durch Einsetzen einiger Indizes von der Gültigkeit dieser Relation. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Relation, dass weiter gilt $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$ und $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$.

(b) [1 Punkt] Zeigen Sie $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$.

(c) [1 Punkt] Beweisen Sie die Identität $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

(d) [2 Punkte] Beweisen Sie die “bac-cab”-Formel $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.