Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL
MITCHELL WHITTAM, DAVID DAMS, BENEDIKT ZERULLA

Blatt 2
Abgabe: Mittwoch 16.11.2022

Zur Bearbeitung der Programmieraufgaben dieses Blattes können Sie die Datei blatt02_vorlage.ipynb *als Vorlage nutzen.*

1. Ableitungen von Vektoren — 5 Punkte

(a) [1 Punkt] Zeigen Sie mit Hilfe der Komponentendarstellung der Vektoren, dass gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}(t)\big] = \dot{\mathbf{a}}(t)\cdot\mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t)\cdot\dot{\mathbf{b}}(t).$$

(b) [3 Punkte] Nutzen Sie diese Produktregel, um zu zeigen, dass gilt

$$\text{(i)}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)] = 2\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\ddot{\mathbf{x}}(t) \qquad \text{(ii)}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{x}(t)| = \frac{\mathbf{x}(t)\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\mathbf{x}(t)|}.$$

(c) [1 Punkt] Zeigen Sie damit: Für jeden Vektor $\mathbf{x}(t)$ konstanter Länge steht die Ableitung nach der Zeit orthogonal auf $\mathbf{x}(t)$, d.h.: $|\mathbf{x}(t)| = c = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}}(t) \perp \mathbf{x}(t)$.

2. Bogenlänge — 7 Punkte

Auf Blatt01 haben Sie die Schraubentrajektorie kennengelernt, die die spiralförmige Bahnkurve einer punktförmigen Masse m beschrieb

$$\mathbf{r}_1(t) = \ [r\cos(\omega t)\ r\sin(\omega t)\ vt] \qquad \text{mit} \qquad r,\omega,v = \text{const.}$$

(a) [3 Punkte] Berechnen Sie die Bogenlänge von $t' = 0$ zu $t' = t$, die gegeben ist durch

$$s_1(t) = \int_0^t \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t'}\right| \mathrm{d}t'\,.$$

(b) [2 Punkte] Bestimmen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}(t)$.

(c) [2 Punkte] Gegeben sei nun die Kurve

$$\mathbf{r}_2(t) = \begin{bmatrix} r\cos(b)\cos(\omega t) + [-r\sin(a)\sin(\omega t) + vt\cos(a)]\sin(b) \\ r\sin(\omega t)\cos(a) + vt\sin(a) \\ -r\sin(b)\cos(\omega t) + [-r\sin(a)\sin(\omega t) + vt\cos(a)]\cos(b) \end{bmatrix}$$

wobei a, b neue Konstanten bezeichnen. Berechnen Sie die Bogenlänge dieser Bahnkurve symbolisch unter Zuhilfename der Python-Bibliothek sympy.

Vergleichen Sie mit Ihren Ergebnissen aus Aufgabenteil (a).

Welche Verbindung besteht zwischen $\mathbf{r}_1(t)$ und $\mathbf{r}_2(t)$?
Hinweis: Es ist hilfreich, beide Kurven für feste Werte von a und b zu plotten.

3. Kraft auf eine Punktmasse

4 Punkte

Gegeben sei das folgende eindimensionale Arrangement von unendlich vielen Punktmassen, die mit einem Index $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet werden

(Die Punkte zur Rechten deuten die weiteren Punktmassen an). Die Kraft F_{ij} von Punktmasse j auf Punktmasse i sei gegeben durch

$$F_{ij} = \frac{C}{d_{ij}^2}, \tag{1}$$

wobei d_{ij} den Abstand der Punktmassen kennzeichnet und C eine Konstante ist.

(a) [1 Punkt] Schreiben Sie den Ausdruck für die Gesamtkraft F_0 auf, die auf die 0-te Punktmasse resultiert.

(b) [3 Punkte] Drücken Sie d_{0j} als Funktion von F_0 aus.

Hinweis: Schreiben Sie $d_{0j} = \sqrt{a}^j,\ a > 1$ *und nutzen Sie die geometrische Reihe aus der Vorlesung (Kapitel 2.1.2).*