

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Blatt 2

MITCHELL WHITTAM, DAVID DAMS, BENEDIKT ZERULLA

Abgabe: Mittwoch 16.11.2022**1. Ableitungen von Vektoren**

5 Punkte

Gegeben sind zwei zeitabhängige Vektoren $\mathbf{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))^T$ und $\mathbf{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))^T$.

(a) [1 Punkt] Mit der Komponentendarstellung der Vektoren soll gezeigt werden, dass gilt

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t)] = \dot{\mathbf{a}}(t) \cdot \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \cdot \dot{\mathbf{b}}(t) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} [\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)] = \dot{\mathbf{a}}(t) \times \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \times \dot{\mathbf{b}}(t)$$

Wir nutzen die Darstellung

$$\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t) = a_i(t) b_i(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t) = \epsilon_{ijk} a_i(t) b_j(t) \mathbf{e}_k$$

Damit erhalten wir

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t)] = \frac{d}{dt} [a_i(t) b_i(t)] = [\dot{a}_i(t) b_i(t) + a_i(t) \dot{b}_i(t)] = \dot{\mathbf{a}}(t) \cdot \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \cdot \dot{\mathbf{b}}(t)$$

(b) [3 Punkte] Die Produktregel soll genutzt werden um zu zeigen, dass weiter gilt

$$(i) \quad \frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)] = 2\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t) \quad (ii) \quad \frac{d}{dt} |\mathbf{x}(t)| = \frac{\mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}{|\mathbf{x}(t)|}$$

Die erste Relation lässt sich direkt durch Anwenden der Produktregel zeigen

$$(i) \quad \frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)] = \ddot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) + \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t) = 2\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t)$$

Für die zweite Relation muss man noch die Kettenregel verwenden

$$(ii) \quad \frac{d}{dt} |\mathbf{x}(t)| = \frac{d}{dt} [\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t)]^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{[\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t)]^{1/2}} 2\mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}{|\mathbf{x}(t)|}$$

(c) [1 Punkt] Damit lässt sich direkt zeigen: Für jeden Vektor $\mathbf{x}(t)$ konstanter Länge steht die Ableitung nach der Zeit orthogonal zu $\mathbf{x}(t)$, d.h.: $|\mathbf{x}(t)| = c$, $c = \text{const.} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) \perp \mathbf{x}(t)$

$$|\mathbf{x}(t)| = c \Rightarrow \frac{d}{dt} |\mathbf{x}(t)| = 0 = \frac{\mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}{|\mathbf{x}(t)|} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) \perp \mathbf{x}(t)$$

2. Bogenlänge

7 Punkte

Auf Blatt 1 haben Sie die Schraubentrajektorie kennengelernt, die die spiralförmige Bahnkurve einer punktförmigen Masse m beschreibt

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \\ vt \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r, \omega, v = \text{const.}$$

- (a) [3 Punkte] Um die Bogenlänge zu berechnen, benötigen wir zunächst die Norm der Geschwindigkeit $v(t') = |\mathbf{v}(t')| = \left| \frac{d\mathbf{r}(t')}{dt'} \right|$. Die Geschwindigkeit der Schraubentrajektorie lautet (Siehe Blatt 1)

$$\mathbf{v}(t') = \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\omega t') \\ r\omega \cos(\omega t') \\ v \end{pmatrix}$$

mit der Norm $v = \sqrt{(r\omega)^2 + v^2}$. Die Bogenlänge ist nun

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t v(t') t' \\ &= \int_0^t \sqrt{(r\omega)^2 + v^2} t' \\ &= \sqrt{(r\omega)^2 + v^2} t. \end{aligned}$$

Die Bogenlänge wächst also linear mit der Zeit. Dies ist eine Konsequenz der Kreisbewegung in der xy -Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und der linearen Bewegung entlang der z -Achse mit konstanter Geschwindigkeit v .

- (b) [2 Punkte] Der Tangenteneinheitsvektor wurde definiert als $\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}$. Er ergibt sich direkt aus den Ergebnissen von der Teilaufgabe (a):

$$\mathbf{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{(r\omega)^2 + v^2}} \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\omega t) \\ r\omega \cos(\omega t) \\ v \end{pmatrix}.$$

- (c) [2 Punkte] **Die Lösungen für 2(c) sind in der Datei blatt02_muster.ipynb zu finden.**

Die Kurve $\mathbf{r}_1(t)$ geht aus der Kurve $\mathbf{r}_2(t)$ durch zwei Rotationen (um die x -Achse, dann um die y -Achse) hervor. Daher ändert sich die Bogenlänge nicht.

3. Kraft auf eine Punktmasse

4 Punkte

Gegeben sei das folgende eindimensionale Arrangement von $n \in \mathbb{N}$ Punktmassen



(Die Punkte zur Rechten deuten unendlich viele weitere Punktmassen an). Die Kraft F_{ij} von Punktmasse j auf Punktmasse i sei gegeben durch

$$F_{ij} = \frac{C}{d_{ij}^2}, \quad (1)$$

wobei d_{ij} den Abstand der Punktmassen kennzeichnet und C eine Konstante ist.

- (a) [1 Punkt] Schreiben Sie den Ausdruck für die Gesamtkraft F_0 auf, die auf die 0-te Punktmasse resultiert.

$$\begin{aligned} F_0 &= C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{d_{0j}^2} \\ &= C \left(\frac{1}{d_{01}^2} + \frac{1}{d_{02}^2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (2)$$

- (b) [3 Punkte] Drücken Sie d_{0j} als Funktion von F_0 aus.

Hinweis: Schreiben Sie $d_{0j} = \sqrt{a^j}$, $a > 1$ und nutzen Sie die geometrische Reihe aus der Vorlesung (Kapitel 2.1.2).

$$\begin{aligned} F_0 &= C \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots \right) \\ &= \frac{C/a}{1 - (1/a)} \\ &= \frac{C}{a - 1} \\ \Rightarrow a &= \frac{C + F_0}{F_0} \\ \Rightarrow d_{0j} &= \sqrt{\frac{C + F_0}{F_0}^j}. \end{aligned} \quad (3)$$

blatt2_muster

May 10, 2023

```
[49]: import sympy as sp
      from sympy.abc import a,b,c,r,v,w,t # für Variablen
```

Zu Beginn des Notebooks erfolgt hier anhand einiger Beispiele eine kleine Wiederholung nützlicher sympy-Funktionen, die Sie vielleicht für diese Aufgabe brauchen werden.

```
[50]: ## vektoren können so definiert werden
      vec = sp.Matrix( [t**2, t**2, t**2] )
      ## das symbolische skalarprodukt zweier vektoren wird über "dot" gemacht
      vec.dot(vec)
      ## wurzelfunktion
      sp.sqrt(vec.dot(vec))
      ## symbolische integration
      sp.integrate( vec )
      ## ausdrücke vereinfachen
      sp.simplify( t + sp.integrate(sp.cos(t)**2 + sp.sin(t)**2,t) )
```

[50]: $2t$

Unter Zuhilfenahme der Beispiele, schreiben sie die Funktion `arc_length` so um, dass sie die Bogenlänge zurückgibt.

```
[51]: def arc_length( curve, parameter ):
      diff = sp.diff( curve, parameter )
      integrand = sp.sqrt( sp.simplify( diff.dot( diff ) ) )
      return sp.simplify(integrand.integrate( parameter ) )
```

```
[52]: vec = sp.Matrix( [r*sp.cos(w*t), r*sp.cos(a)*sp.sin(w*t) + sp.sin(a)*t*v, sp.
      ↪cos(a)*t*v - r*sp.sin(a)*sp.sin(w*t)] )
      mat_x = sp.Matrix( [[sp.cos(b),0, sp.sin(b)], [0, 1, 0], [-sp.sin(b), 0, sp.
      ↪cos(b)]] )
      vec = mat_x @ vec
      vec
```

[52]:
$$\begin{bmatrix} r \cos(b) \cos(tw) + (-r \sin(a) \sin(tw) + tv \cos(a)) \sin(b) \\ r \sin(tw) \cos(a) + tv \sin(a) \\ -r \sin(b) \cos(tw) + (-r \sin(a) \sin(tw) + tv \cos(a)) \cos(b) \end{bmatrix}$$

```
[53]: arc_length( vec, t )
```

[53]: $t\sqrt{r^2w^2 + v^2}$

[]: