Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Mitchell Whittam, David Dams, Benedikt Zerulla

Blatt 2
Abgabe: Mittwoch 23.11.2022

1. System von Kräften — 4 Punkte

Gegeben seien drei auf ein Teilchen einwirkende Kräfte, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ und $\mathbf{F}_3$, wobei

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3a \\ 2b \end{pmatrix} \mathrm{N}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ -a \end{pmatrix} \mathrm{N} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{N}. \tag{1}$$

und a und b Konstanten sind.

(a) [1 Punkt] Bestimmen sie die gesamte auf das betrachtete Teilchen einwirkende $\mathbf{F}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3a + b + 3 \\ 2b - a + 1 \end{pmatrix} \mathrm{N}. \end{aligned}$$

(b) [2 Punkte] Unter der Annahme, dass das Teilchen im Kräftegleichgewicht ist, finden sie a und b.

Das Teilchen ist im Kräftegleichgewicht, deswegen gilt

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Infolgedessen ergibt sich

$$\begin{aligned} 3a + b + 3 = 2b - a + 1 = 0 \\ \implies a = -\frac{5}{7} \quad \text{und} \quad b = -\frac{6}{7} \end{aligned}$$

(c) [1 Punkt] Welche von diesen Gesetzen haben Sie in Teil (b) verwendet? Kreisen Sie die richtige Antwort ein.

a) Nur Superposition b) Superposition und Newton II c) Nur Newton I

Alle könnten als richtig argumentiert werden.

2. Kraft zwischen geladenen Massen — 8 Punkte

Gegeben seien zwei Körper identischer Masse m und unterschiedlicher Ladungen q_1 und q_2 an den Orten $\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{r}_2 = d\mathbf{e}_z$.

(a) [2 Punkte] Berechnen Sie für $q_1 = -q_2$ die Kraft $\mathbf{F}_{12}$, die von Körper 2 auf Körper 1 wirkt, sowie die umgekehrt von Körper 1 auf Körper 2 ausgeübte Kraft $\mathbf{F}_{21}$.
Mit $|q_1| = q, c_e \equiv \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}, c_g \equiv Gm^2$ ergibt sich

$$\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_e = \frac{(c_e + c_g)}{d^2}\mathbf{e}_z = -\mathbf{F}_{21}$$

(b) [2 Punkte] Betrachten Sie nun den Fall $q_1 = q_2$. Wie groß ist das Verhältnis $|\frac{q_1}{m}|$ falls die gravitative Anziehung die elektrostatische Abstoßung kompensiert, also falls $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}$?

Da sich das Ladungsvorzeichen in der Lösung der vorherigen Teilaufgabe umdreht, ist die Aufgabe identisch zu der Forderung, dass $c_e = c_g$. Damit ergibt sich

$$\left|\frac{q}{m}\right| = \sqrt{G4\pi\epsilon_0} \approx 10^{-11}$$

Die Masse müsste also gegenüber der Ladung eine absurde Größe haben.

(c) [2 Punkte] Berechnen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die von den beiden Körpern auf ein Testobjekt mit Masse m_T und Ladung q_T ausgeübte Gesamtkraft. Die Position des Testobjekts sei gegeben durch $\mathbf{r}_T = z\mathbf{e}_z$.

Mit $K_e \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, K_g = Gmm_T$ gilt

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_e = \left(\frac{-z}{|z|^3} + \frac{d-z}{|d-z|^3}\right) K_g \mathbf{e}_z + \left(q_1 \frac{z}{|z|^3} - q_2 \frac{(d-z)}{|d-z|^3}\right) q_T K_e \mathbf{e}_z$$

(d) [2 Punkte] Geben Sie für $q_1 = q_2$ den Wert für z an, bei dem die Gesamtkraft verschwindet. Gibt es einen solchen Punkt für $q_1 = -q_2$?

Am zweckmäßigsten ist es, die Kraft zunächst etwas umzuschreiben ($q_T \neq 0$)

$$\mathbf{F} = q_T \left(\frac{-Q_1 z}{|z|^3} + \frac{Q_2(d-z)}{|d-z|^3}\right).$$

Mit $Q_{1,2} = \frac{Gm_T m}{q_T} - K_e q_{1,2}$. Der Testkörper erfährt also eine anziehende "Coulomb-artige" Kraft durch zwei effektive Ladungen. Allgemein folgt dann aus der Bedingung $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ das notwendige Kriterium

$$\left|Q_1 \frac{z}{z^3}\right| = \left|Q_2 \frac{(d-z)}{(d-z)^3}\right| \implies \left|\frac{Q_1}{Q_2}\right| = \frac{d_1^2}{d_2^2} \implies d_1 = d_2 \sqrt{\left|\frac{Q_1}{Q_2}\right|} \equiv d_2 \gamma,$$

wobei $d_1 = |z|, d_2 = |d-z|$. Kandidaten für Gleichgewichtspunkte liegen also näher bei Q_2 oder genau zwischen Q_1 und Q_2, falls $|Q_2| \leq |Q_1|$. Wir werden diese Kandidaten zuerst berechnen und dann physikalischen Szenarien zuordnen. Das Koordinatensystem und die Ladungsbennenung können so gewählt werden, dass $|Q_2| \leq |Q_1|$ und Q_2 "rechts von" Q_1 liegt und damit ist $d_1 = z$, sowie $\gamma \geq 1$. Es ergibt sich

$$d_1 = z = \gamma d_2 = \gamma|d-z| \implies z_{1,2} = \begin{cases} \dfrac{\gamma d}{1+\gamma} & z < d, \\ \dfrac{\gamma d}{\gamma - 1} & z > d. \end{cases}$$

Echte Gleichgewichtspunkte gibt es nur, wenn die resultierende Kraft verschwinden kann. Für $z < d$ müssen beide Ladungen eine abstoßende (anziehende) Kraft ausüben, also $\operatorname{sgn}(Q_1) = \operatorname{sgn}(Q_2)$. Für $z > d$ muss die eine Ladungen abstoßen, während die andere anzieht, also $\operatorname{sgn}(Q_1) = -\operatorname{sgn}(Q_2)$.

Konkret haben wir für $q_1 = q_2$ dass $Q_1 = Q_2 \implies \gamma = 1$ und damit $z = \frac{d}{2}$. Für $q_1 = -q_2$ hängt die Lage des Gleichgewichtspunktes nach der obigen Diskussion vom relativen Vorzeichen der effektiven Ladungen ab. Der Vollständigkeit halber gilt ($q = q_1 = -q_2$)

$$\operatorname{sgn}(Q_1) = \operatorname{sgn}(Q_2) \implies Gmm_T > K_e|qq_T|,$$
$$\operatorname{sgn}(Q_1) = -\operatorname{sgn}(Q_2) \implies Gmm_T < K_e|qq_T|.$$

3. Schräger Wurf 6 Punkte

(a) [2 Punkte] Es handelt sich hierbei um die Grundaufgabe der Kinematik Typ 3, d.h. Die Beschleunigung ist als Funktion des Ortes und als Funktion der Zeit gegeben. Gesucht ist hier die Geschwindigkeit und die Bahnkurve. Aus $\mathbf{a}(t) = -g\mathbf{e}_y$ folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= -gt\,\mathbf{e}_y + \mathbf{v}_0 \\ &= v_0 \cos\alpha\,\mathbf{e}_x + [-gt + v_0 \sin\alpha]\,\mathbf{e}_y\end{aligned}$$

Der Ortsvektor folgt durch das Integrieren von der Geschwindigkeit:

$$\mathbf{r}(t) = v_0 t \cos\alpha\,\mathbf{e}_x + \left[-\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha\right]\mathbf{e}_y$$

(b) [1 Punkt] Plotten Sie mithilfe der Vorlage die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ dieser Masse für die dort angegebenen Werte von α und $v_0 = 10$, sodass in jedem Plot mindestens der Auftreffpunkt der Masse noch erkennbar ist.

Siehe blatt03_muster.ipynb.

(c) [3 Punkte] Die Wurfhöhe ist $h = y(t_s) + x(t_s)\tan\beta$, wobei t_s die „Steigzeit" ist. Um diese zu ermitteln müssen wir $\dot{y}(t) + \dot{x}(t)\tan\beta \stackrel{!}{=} 0$ setzen. Es gilt

$$\begin{aligned}&\dot{y} + \dot{x}\tan\beta = 0 \\ \Rightarrow\; & v_0 \sin\alpha - gt + v_0 \cos\alpha \tan\beta = 0 \\ \Rightarrow\; & t_s = \frac{v_0}{g}\left[\sin\alpha + \cos\alpha\tan\beta\right]\end{aligned}$$

Diese Zeit wird benötigt um die maximale Höhe zu erreichen. Diese Höhe als Funktion des Wurfwinkels α lautet

$$\begin{aligned}h(\alpha) &= -\frac{1}{2}gt_s^2 + v_0\sin(\alpha)t_s + v_0\cos(\alpha)t_s\tan(\beta) \\ &= -\frac{v_0^2}{2g}\left(\cos\alpha\tan\beta + \sin\alpha\right)^2 + \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\left(\cos\alpha\tan\beta + \sin\alpha\right) + \frac{v_0^2}{g}\cos\alpha\tan\beta\left(\cos\alpha\tan\beta + \sin\alpha\right) \\ &= \frac{v_0^2}{g}\left(\cos\alpha\tan\beta + \sin\alpha\right)\left(\cos\alpha\tan\beta + \sin\alpha\right) - \frac{v_0^2}{2g}\left(\cos\alpha\tan\beta + \sin\alpha\right)^2 \\ &= \frac{v_0^2}{g}\left(\cos\alpha\tan\beta + \sin\alpha\right)^2 - \frac{v_0^2}{2g}\left(\cos\alpha\tan\beta + \sin\alpha\right)^2 \\ &= \frac{v_0^2}{2g}\left(\cos\alpha\tan\beta + \sin\alpha\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}\frac{\left(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\right)^2}{\cos^2\beta} \\ &= \frac{v_0^2}{2g}\frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2\beta}.\end{aligned}$$

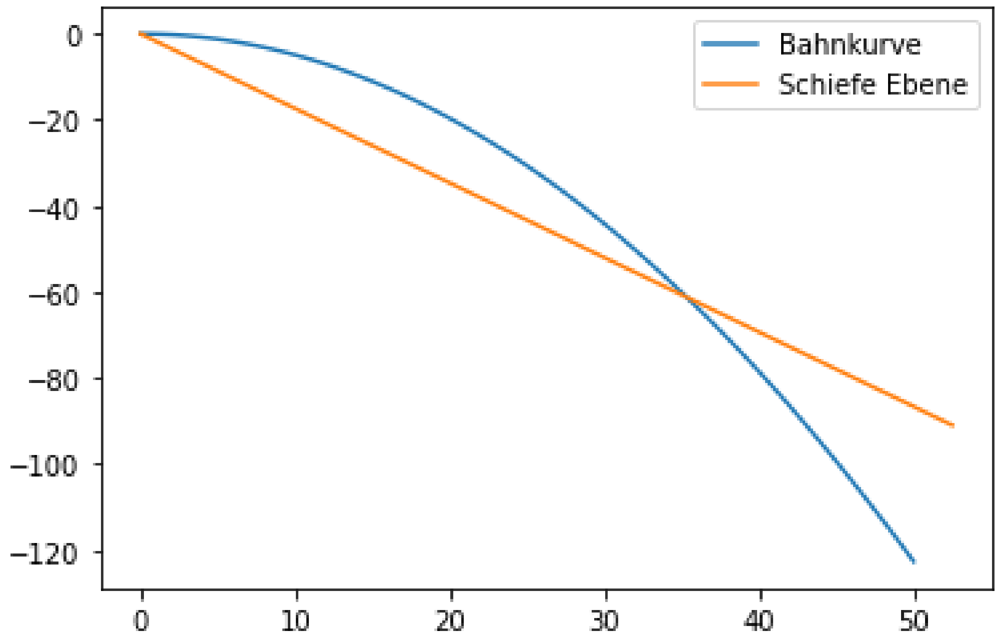
blatt03_muster

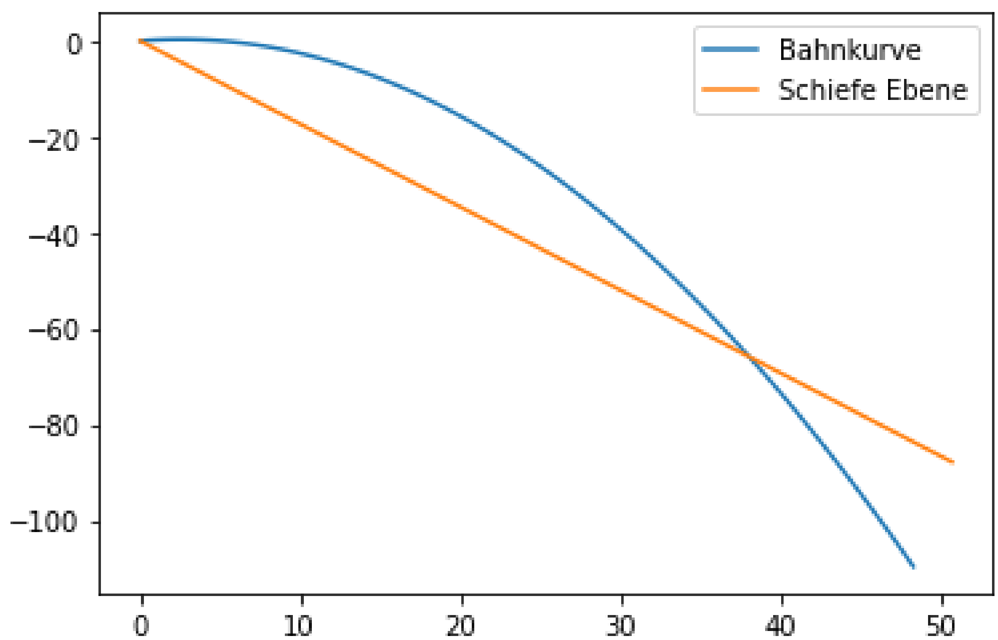
May 10, 2023

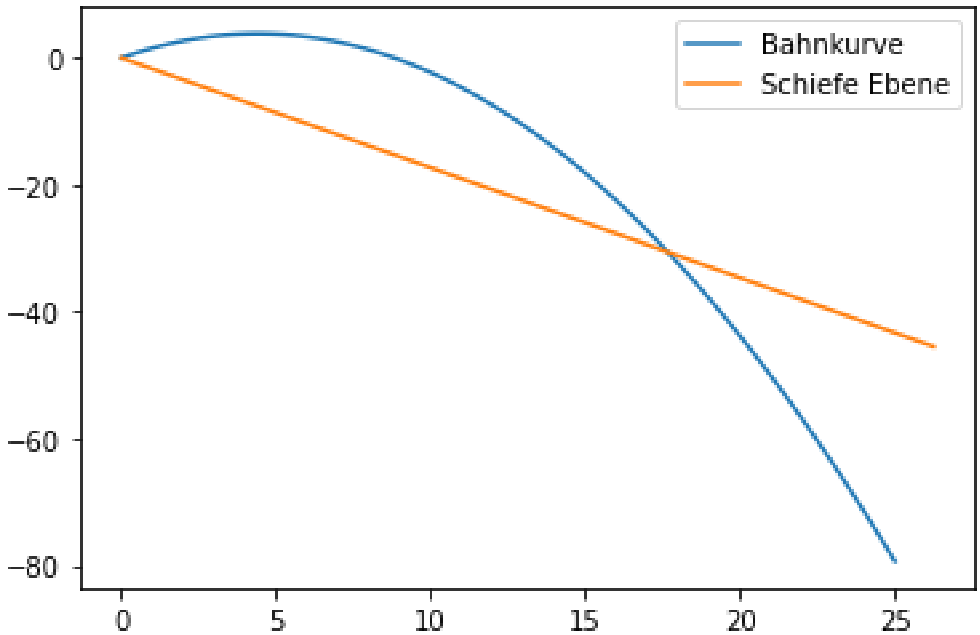
[24]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
GRAVITATION_ACC = 9.81 # das ist die Erdbeschleunigung g
```

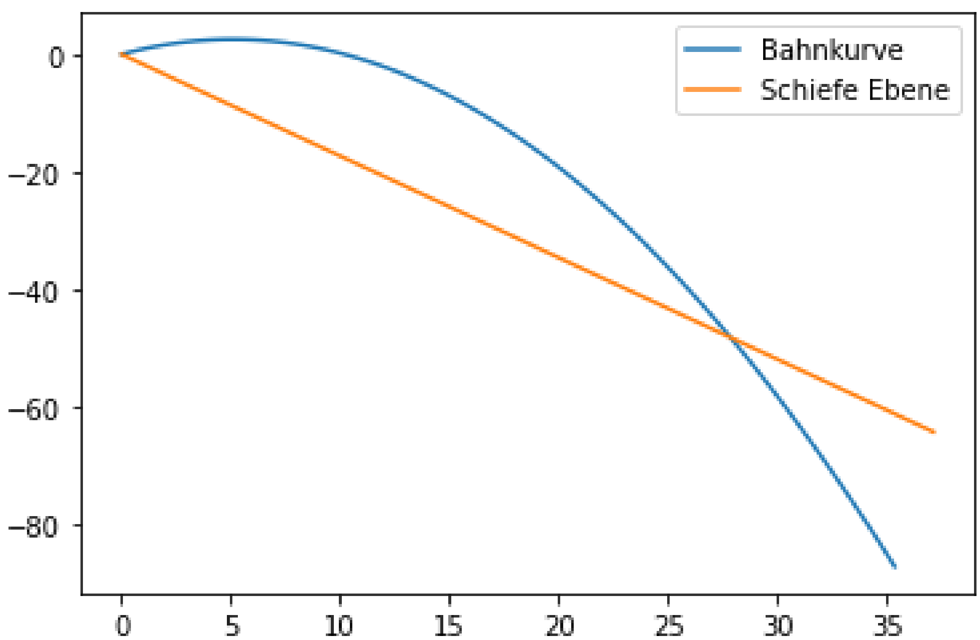
[25]:
```
def position( t, v0, alpha ):
    return [v0*t*np.cos(alpha),v0*t*np.sin(alpha) - GRAVITATION_ACC*t**2/2] #␣
 ↪hier können Sie die bahnkurve eintragen

def line( beta, ax ):
    _, b = ax.get_xlim()
    ax.plot( [0,b], [0, -np.tan(beta)*b], label = 'Schiefe Ebene'  )
    ax.legend()
```

[26]:
```
beta = np.pi/3
alphas = [0, np.pi/4 - beta/2, beta, np.pi/4]
t = np.linspace(0, 5, 100)
v0 = 10
for alpha in alphas:
    fig, ax = plt.subplots( 1,1  )
    # damit plotten wir die bahnkurve
    ax.plot( *position(t, v0, alpha), label = 'Bahnkurve' )
    # damit plotten wir die schiefe ebene
    line( beta, ax )
```


Bahnkurve
Schiefe Ebene
0
−20
−40
−60
−80
−100
−120
0
10
20
30
40
50


Bahnkurve
Schiefe Ebene
0
−20
−40
−60
−80
−100
0
10
20
30
40
50


Bahnkurve
Schiefe Ebene
0
−20
−40
−60
−80
0
5
10
15
20
25


Bahnkurve
Schiefe Ebene
0
−20
−40
−60
−80
0
5
10
15
20
25
30
35