Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Mitchell Whittam, David Dams, Benedikt Zerulla

Blatt 4
Abgabe: Mittwoch 30.11.2022

Zur Bearbeitung der Programmieraufgaben dieses Blattes können Sie die Datei blatt04_vorlage.ipynb *als Vorlage nutzen.*

Um alle Punkte zu bekommen, müssen alle Lösungen so weit wie möglich vereinfacht werden.

1. Kraft auf ein Teilchen 9 Punkte

Auf ein Teilchen der Masse m am Ort $x(t) > 0$ wirke eine Kraft der Form $F = \frac{-K}{x^{n+1}}$, wobei $n > 0$ eine (ungerade) natürliche Zahl und $K > 0$ eine Konstante sei.

(a) [1 Punkt] Stellen Sie mithilfe der Newtonschen Gesetze eine Differentialgleichung (DGL) für den Ort des Teilchens $x(t)$ auf.

(b) [1 Punkt] Nennen Sie ein Beispiel für eine Kraft, die von der hier angegebenen Form ist.

(c) [2 Punkte] Überführen Sie diese Differentialgleichung in eine äquivalente DGL erster Ordnung. Beachten Sie bei der Auswahl der Lösung für die Geschwindigkeit, dass die Kraft F anziehend wirkt. Sie sollten erhalten

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{\frac{K_n}{x^n(t)} + \frac{2}{m}E},$$

wobei $K_n = \frac{2K}{nm}, E = \frac{m\dot{x}^2(0)}{2} - \frac{K}{nx^n(0)}$.

Hinweis: Multiplizieren Sie beide Seiten der Ausgangs-DGL mit $\dot{x}(t)$ *und nutzen Sie* $\frac{d}{dt}\frac{1}{x^n(t)} = \dot{x}(t)\frac{-n}{x^{n+1}(t)}$, *sowie* $\frac{d}{dt}(\dot{x}(t))^2 = 2\dot{x}(t)\ddot{x}(t)$.

(d) (i) [2 Punkte] Lösen Sie die obige Differentialgleichung für $E = 0$ durch Separation der Variablen (vergleichen Sie dazu den 7. mathematischen Einschub der Vorlesung aus Kapitel 2.1.5). Finden Sie dazu zunächst eine geeignete Beziehung zwischen $x(0)$ und $\dot{x}(0)$, sodass $E = 0$ und benutzen Sie die Anfangsbedingung $x(0) = d$.

(ii) [1 Punkt] Plotten Sie die Lösung $x(t)$ mithilfe der Vorlage für die dort angegebenen Parameterwerte.

(e) [2 Punkte] Berechnen Sie die Kollisionszeit T_n, also die Zeit, zu der das Teilchen in den Ursprung der Kraft bei $x = 0$ stürzt. Kennen Sie eine Kraft, bei der die Kollisionszeit unabhängig von der Teilchenmasse m ist?

2. Vektoralgebra 8 Punkte

Gegeben sei das Skalarfeld

$$\phi(x, y, z) = y + \sin(x)\ln(z) + \mathrm{e}^{xy}.$$

(a) [2 Punkte] Bestimmen Sie grad $\phi(x, y, z)$.

(b) [2 Punkte] Bestimmen Sie div grad $\phi(x, y, z)$.

(c) Gegeben sei nun das Vektorfeld

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a\mathrm{e}^{x} + f(x, y, z) \\ b\sin(y) + f(x, y, z) \\ -a^{3}\ln(z) + f(x, y, z) \end{pmatrix},$$

wobei a und b Konstanten seien.

(i) [2 Punkte] Bestimmen Sie eine nicht konstante Funktion $f(x, y, z)$, sodass $\mathbf{V}(x, y, z)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ im gesamten Raum wirbelfrei ist.

(ii) [2 Punkte] Sei nun $f(x, y, z) = 0$. Bestimmen Sie beim Punkt $\left(1, \frac{\pi}{2}, \mathrm{e}\right)$ alle mögliche Werte von a, sodass $\mathbf{V}(x, y, z)$ divergenzfrei ist.