

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Blatt 4

MITCHELL WHITTAM, DAVID DAMS, BENEDIKT ZERULLA

Abgabe: Mittwoch 23.11.2022

Zur Bearbeitung der Programmieraufgaben dieses Blattes können Sie die Datei blatt04_vorlage.ipynb als Vorlage nutzen.

Um alle Punkte zu bekommen, müssen alle Lösungen so weit wie möglich vereinfacht werden.

1. Kraft auf ein Teilchen

9 Punkte

Auf ein Teilchen der Masse m am Ort $x(t) > 0$ wirke eine Kraft der Form $F = \frac{-K}{x^{n+1}}$, wobei $n > 0$ eine (ungerade) natürliche Zahl und $K > 0$ eine Konstante sei.

- (a) [1 Punkt] Stellen Sie mithilfe der Newtonschen Gesetze eine Differentialgleichung für den Ort des Teilchens $x(t)$ auf.

Aus $F = m\ddot{x}(t)$ folgt

$$m\ddot{x}(t) = \frac{-K}{x^{n+1}(t)}.$$

- (b) [1 Punkt] Welche Einheit hat die Konstante K ? Nennen Sie Beispiele für Kräfte, die von der hier angegebenen Form sind.

Wir haben $[K] = \frac{N}{m^n}$. Beispiele für Kräfte dieser Form sind

- Coulombkraft
- Gravitationskraft
- Etwas esoterisch: Casimir-Effekt

- (c) [2 Punkte] Überführen Sie diese Differentialgleichung in eine äquivalente DGL erster Ordnung.

Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit $\dot{x}(t)$ führt auf

$$\begin{aligned} m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) &= \dot{x}(t)\frac{-K}{x^{n+1}(t)} \\ \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}(t))^2 &= \frac{K}{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x^n(t)}\right) \\ \frac{m}{2}(\dot{x}^2(t) - \dot{x}^2(0)) &= \frac{K}{n}\left(\frac{1}{x^n(t)} - \frac{1}{x^n(0)}\right) \\ \dot{x}(t) &= \pm\sqrt{\frac{K_n}{x^n(t)} + \frac{2}{m}E}, \end{aligned}$$

wobei $K_n = \frac{2K}{mn}$, $E = \frac{m\dot{x}^2(0)}{2} - \frac{K}{nx^n(0)}$. Im letzten Schritt muss man die negative Wurzel wählen, da die Kraft anziehend ist und somit die Geschwindigkeit in Richtung des Ursprungs zeigen sollte.

- (d) [3 Punkte] Lösen Sie die obige Differentialgleichung durch Separation der Variablen. Finden Sie dazu zunächst eine geeignete Beziehung zwischen $x(0)$ und $\dot{x}(0)$, sodass $E = 0$ und benutzen Sie die Anfangsbedingung $x(0) = d$.

Aus $E = 0$ folgt $\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{2K}{mnx^n(0)}} = \sqrt{\frac{2K}{mnd^n}}$ und somit sind die Anfangsgeschwindigkeit und -ort nicht mehr unabhängig wählbar.

Die Lösung ist demnach

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{-\sqrt{K_n}}{x^{n/2}(t)} \\ dx x^{n/2} &= -dt \sqrt{K_n} \\ \frac{2}{n+2} x^{\frac{n+2}{2}} &= -t \sqrt{K_n} + C \\ x(t) &= \left(\frac{n+2}{2} (C - t \sqrt{K_n}) \right)^{\frac{2}{n+2}}.\end{aligned}$$

Aus $x(0) = d$ folgt also $C = \frac{2}{n+2} d^{\frac{n+2}{2}}$. Die Plots sind in blatt04_muster.ipynb zu finden.

- (e) [1 Punkt] Berechnen Sie die Kollisionszeit T_n , also die Zeit, zu der das Teilchen in den Ursprung der Kraft bei $x = 0$ stürzt. Kennen Sie eine Kraft, bei der die Kollisionszeit unabhängig von der Teilchenmasse m ist?

Es folgt aus $x(T_n) = 0$, dass $T_n = \frac{C}{\sqrt{K_n}} = \frac{2}{n+2} \sqrt{\frac{nmd^{n+2}}{2K}}$.

Ein Beispiel für eine solche Kraft wäre die Gravitation.

2. Vektoralgebra

8 Punkte

Gegeben sei das Skalarfeld

$$\phi(x, y, z) = y + \sin(x) \ln(z) + e^{xy}.$$

- (a) [2 Punkte] Bestimmen Sie $\text{grad } \phi(x, y, z)$.

$$\text{grad } \phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(x) \ln(z) + ye^{xy} \\ 1 + xe^{xy} \\ \sin(x)/z \end{pmatrix}.$$

- (b) [2 Punkte] Bestimmen Sie $\text{div grad } \phi(x, y, z)$.

$$\text{div grad } \phi(x, y, z) = -\sin(x) \ln(z) + (x^2 + y^2)e^{xy} - \frac{\sin(x)}{z^2}.$$

- (c) Gegeben sei nun das Vektorfeld

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} ae^x + f(x, y, z) \\ b \sin(y) + f(x, y, z) \\ -a^3 \ln(z) + f(x, y, z) \end{pmatrix},$$

wobei a und b Konstanten seien.

- (i) [2 Punkte] Bestimmen Sie eine nicht konstante Funktion $f(x, y, z)$, sodass $\mathbf{V}(x, y, z)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ im gesamten Raum wirbelfrei ist.

$\mathbf{V}(x, y, z)$ ist wirbelfrei, deswegen gilt

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{V}(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{0} \\ \implies \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}.\end{aligned}$$

f ist deswegen irgendeine Funktion, deren Argument die Summe von x , y und z ist.

- (ii) [2 Punkte] Sei nun $f(x, y, z) = 0$. Bestimmen Sie beim Punkt $(1, \frac{\pi}{2}, e)$ alle mögliche Werte von a , sodass $\mathbf{V}(x, y, z)$ divergenzfrei ist.

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{V}|_{(1, \frac{\pi}{2}, e)} &= ae^x + b \cos(y) - \frac{a^3}{z} \Big|_{(1, \frac{\pi}{2}, e)} \\ &= a(e - \frac{a^2}{e}) \\ &= 0 \\ \implies a &= 0 \text{ oder } a = \pm e.\end{aligned}$$

blatt04_muster

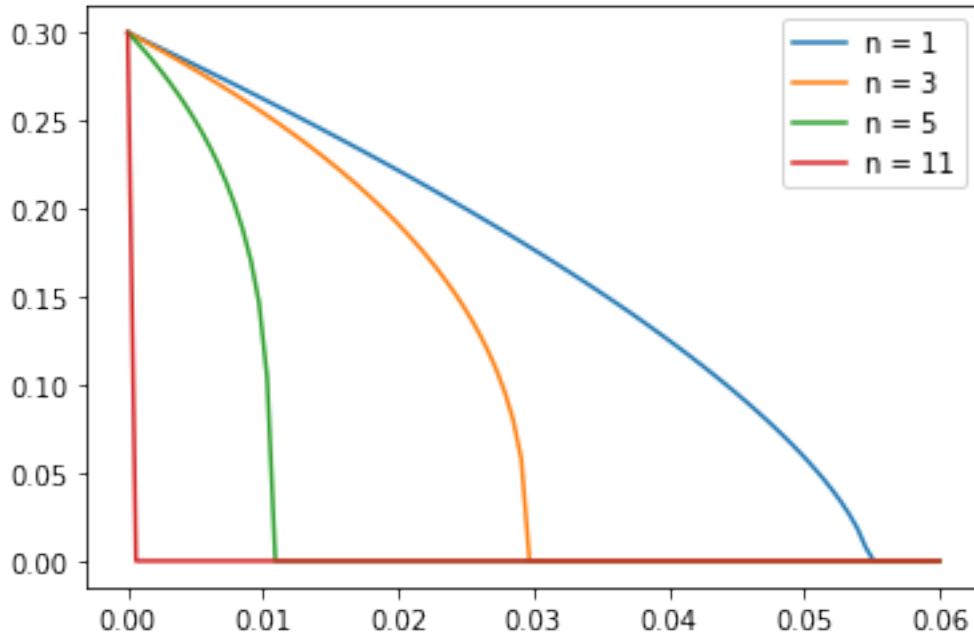
May 10, 2023

```
[2]: import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
[3]: def solution( n, t, d, K, m ):
    K_n = 2*K/(m*n)
    f_n = 2/(n+2)
    C = f_n*d**(1/f_n)
    val = (1/f_n*(C - t * K_n))**f_n
    val[np.argwhere(np.isnan(val))] = 0
    return val
```

```
[8]: K, m, d = 1, 1, 0.3
t = np.linspace(0, 0.06, 100 )
fig, ax = plt.subplots( 1, 1 )
for n in [1, 3, 5, 11]:
    # damit plotten wir die bahnkurve
    ax.plot( t, solution(n, t, d, K, m), label = f'n = {n}' )
ax.legend()
```

```
/tmp/ipykernel_129/601633990.py:5: RuntimeWarning: invalid value encountered in
power
    val = (1/f_n*(C - t * K_n))**f_n
```



```
[46]: solution(1, t, d, K, m)
```

```
/tmp/ipykernel_156/98699084.py:5: RuntimeWarning: invalid value encountered in power
```

```
    val = (1/f_n*(C - t * K_n))**f_n
```

```
[46]: array([1.71707136, 1.70175904, 1.68637751, 1.67092552, 1.65540174,
1.63980483, 1.62413339, 1.60838597, 1.59256108, 1.57665717,
1.56067264, 1.54460583, 1.52845501, 1.51221841, 1.49589417,
1.47948037, 1.462975 , 1.446376 , 1.42968119, 1.41288833,
1.39599508, 1.37899899, 1.3618975 , 1.34468795, 1.32736757,
1.30993343, 1.2923825 , 1.27471156, 1.25691728, 1.23899614,
1.22094444, 1.20275829, 1.18443359, 1.16596601, 1.14735101,
1.12858375, 1.10965913, 1.09057173, 1.07131581, 1.05188524,
1.03227352, 1.01247369, 0.99247833, 0.97227947, 0.95186856,
0.93123642, 0.91037311, 0.88926793, 0.86790925, 0.84628444,
0.8243797 , 0.80217996, 0.77966865, 0.75682751, 0.73363632,
0.71007256, 0.68611109, 0.6617236 , 0.63687807, 0.61153803,
0.58566158, 0.55920019, 0.53209708, 0.50428506, 0.47568356,
0.44619447, 0.41569614, 0.38403431, 0.35100801, 0.31634629,
0.27966707, 0.24039769, 0.19760037, 0.14950567, 0.0917202 ,
0. , 0. , 0. , 0. , 0. ,
0. , 0. , 0. , 0. , 0. ,
0. , 0. , 0. , 0. , 0. ,
0. , 0. , 0. , 0. , 0. ,
0. , 0. , 0. , 0. , 0. ,
```

3

4

5

1)