Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Mitchell Whittam, David Dams, Benedikt Zerulla

Blatt 5
Abgabe: Mittwoch 07.12.2022

Zur Bearbeitung der Programmieraufgaben dieses Blattes können Sie die Datei blatt05_vorlage.ipynb *als Vorlage nutzen.*

Um alle Punkte zu bekommen, müssen alle Lösungen so weit wie möglich vereinfacht werden.

1. Vektordifferentialrechnung — 4 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{-1}{\sigma}\begin{pmatrix} x(f(\mathbf{r})+1) \\ y(f(\mathbf{r})-2) \\ z(f(\mathbf{r})+1) \end{pmatrix},$$

wobei $f(\mathbf{r}) = e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{2\sigma}}$ und $\sigma > 0$ eine reelwertige Konstante sei.

(a) [2 Punkte] Zerlegen Sie das Vektorfeld in einen wirbelfreien und einen divergenzfreien Anteil.
Hinweis: Scharfes Ansehen, Überlegen und dann Überprüfen können hier eine längere Rechnung ersetzen.

(b) [2 Punkte] Plotten Sie die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$ mit der Jupyter-Notebook-Vorlage bei $z = 0$.

2. Punktmassen im Ring — 5 Punkte

Gegeben seien zwei Massen $m_{1,2}, m_1 < m_2$, die sich reibungslos entlang eines Ringes bewegen. Die Anfangsgeschwindigkeiten seien gegeben durch $v_1^{(0)}$ und $v_2^{(0)} = 0$. Nehmen Sie im Folgenden an, dass die Massen elastisch stoßen.

(a) [1 Punkt] Geben Sie einen Ausdruck für die Geschwindigkeiten der Massen nach dem ersten Stoß $v_{1,2}^{(1)}$ an.
Hinweis: Benutzen Sie hier Ausdrücke aus der Vorlesung und formulieren Sie, als Empfehlung, den Zusammenhang als Matrix-Vektor-Produkt.

(b) [4 Punkte] Berechnen Sie nun allgemein die Geschwindigkeiten der Massen nach dem n-ten Stoß $v_{1,2}^{(n)}$ und betrachten Sie speziell den Fall $m_2 \to \infty$.

3. Rakete in einem Gravitationsfeld 9 Punkte

Eine Rakete mit Anfangsmasse M wird zur Zeit $t_0 = 0$ auf der Erde mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0\hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{0}$ gestartet, wobei der Treibstoff eine Masse $\lambda M,\ 0 < \lambda < 1$ hat. Die Rakete bewegt sich mit Geschwindigkeit $v(t)\hat{\mathbf{e}}_z$ und der Treibstoff wird mit einer konstanten Geschwindigkeit $-U\hat{\mathbf{e}}_z$ relativ zur Rakete ausgestoßen. Zur Zeit t hat die Rakete eine Masse $m(t)$ und Geschwindigkeit $v(t)$. Der Luftwiderstand und jegliche Änderung der Erdbeschleunigung g können ignoriert werden.

(a) [3 Punkte] Mithilfe des Impulssatzes zeigen Sie, dass

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + U\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -mg,$$

indem Sie Terme höherer Ordnung der Form $\mathrm{d}m\mathrm{d}v$ vernachlässigen.

Hinweis: Schreiben Sie den Impulssatz als $\mathrm{d}\mathbf{p} = \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}\mathrm{d}t$, *wobei* $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}$ *die äußere Kraft sei.*

(b) [2 Punkte] Die Rakete hat eine Beschleunigung $\mathbf{a}_R = \alpha g\,\hat{\mathbf{e}}_z$, wobei α eine positive Konstante sei.

Zeigen Sie nun, dass

$$m(t) = M\exp\left[-\frac{g(\alpha+1)}{U}t\right],$$

wobei $\exp(x) \equiv \mathrm{e}^x$.

(c) [4 Punkte] Sei nun $\alpha = 1$. Zeigen Sie, dass die kinetische Energie E_k der Rakete in dem Moment $t = T$, wenn der Treibstoff komplett verbraucht ist, durch

$$E_\mathrm{k} = \frac{MU^2(1-\lambda)}{8}[\ln(1-\lambda)]^2$$

gegeben ist.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst einen Ausdruck für T.