

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

PROF. DR. CARSTEN ROCKSTUHL

Blatt 5

MITCHELL WHITTAM, DAVID DAMS, BENEDIKT ZERULLA

Abgabe: Mittwoch 07.12.2022

Zur Bearbeitung der Programmieraufgaben dieses Blattes können Sie die Datei blatt04_vorlage.ipynb als Vorlage nutzen.

Um alle Punkte zu bekommen, müssen alle Lösungen so weit wie möglich vereinfacht werden.

1. Vektordifferentialrechnung

4 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{-1}{\sigma} \begin{pmatrix} x(f(\mathbf{r}) + 1) \\ y(f(\mathbf{r}) - 2) \\ z(f(\mathbf{r}) + 1) \end{pmatrix},$$

wobei $f(\mathbf{r}) = e^{-\frac{r^2}{2\sigma}}$ und $\sigma > 0$ eine reelle Konstante sei.

- (a) [2 Punkte] Zerlegen Sie das Vektorfeld in einen wirbelfreien und einen divergenzfreien Anteil.

Die Zerlegung kann erfolgen über $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{R}(\mathbf{r})$, wobei $\mathbf{D}$ wirbelfrei und $\mathbf{R}$ divergenzfrei ist

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = -\sigma^{-1} \cdot \mathbf{r} f(r)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = -\sigma^{-1} \cdot (x\mathbf{e}_x - 2y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)$$

Das Vektorfeld $\mathbf{D}$ ist wirbelfrei, da $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \nabla f(r)$ und die Divergenzfreiheit von $\mathbf{R}$ folgt durch Nachrechnen.

- (b) [2 Punkte] Plotten Sie die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$ mit der Jupyter-Notebook-Vorlage bei $z = 0$.

Wir berechnen zunächst die Divergenz

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = -\sigma^{-1}(3 - \sigma^{-1} \cdot \mathbf{r}^2)f(r).$$

Dieser Ausdruck gilt also auch, wenn wir $\mathbf{r}$ auf die xy -Ebene einschränken. Die Plots sind in der Notebook-Musterlösung zu finden.

2. Punktmassen im Ring

5 Punkte

Gegeben seien zwei Massen $m_{1,2}, m_1 < m_2$, die sich reibungslos entlang eines Ringes bewegen. Die Anfangsgeschwindigkeiten seien gegeben durch $v_1^{(0)}$ und $v_2^{(0)} = 0$. Nehmen Sie im Folgenden an, dass die Massen elastisch stoßen.

- (a) [1 Punkte] Geben Sie einen Ausdruck für die Geschwindigkeiten der Massen nach dem ersten Stoß $v_{1,2}^{(1)}$ an.

Aus der Vorlesung:

$$\begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1+x & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(0)} \\ v_2^{(0)} \end{pmatrix},$$

wobei $x = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$. Da $x < 0$ und $v_2^{(0)} = 0$ sind die resultierenden Geschwindigkeiten gerade die Kollisionsgeschwindigkeiten für den nächsten Stoß.

- (b) [4 Punkte] Berechnen Sie nun allgemein die Geschwindigkeiten der Massen nach dem n -ten Stoß $v_{1,2}^{(n)}$ und betrachten Sie speziell den Fall $m_2 \rightarrow \infty$.

Mit

$$M = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1+x & -x \end{pmatrix}$$

sieht man, dass

$$\begin{aligned} M^2 &= 1 \\ M^{2n} &= 1 \\ M^{2n+1} &= M \end{aligned}$$

und damit, dass

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1^{(2n)} \\ v_2^{(2n)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_1^{(0)} \\ v_2^{(0)} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_1^{(2n+1)} \\ v_2^{(2n+1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt bei $v_2^{(0)} = 0$ für $m_2 \rightarrow \infty$, dass $x \rightarrow -1$ und damit

$$M \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also folgt

$$\begin{pmatrix} v_1^{(n)} \\ v_2^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n v_1^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Rakete in einem Gravitationsfeld

9 Punkte

Eine Rakete mit Anfangsmasse M wird zur Zeit $t_0 = 0$ auf der Erde mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{0}$ gestartet, wobei der Treibstoff eine Masse λM , $0 < \lambda < 1$ hat. Die Rakete bewegt sich mit Geschwindigkeit $v(t) \hat{\mathbf{e}}_z$ und der Treibstoff wird mit einer konstanten Geschwindigkeit $-U \hat{\mathbf{e}}_z$ relativ zur Rakete ausgestoßen. Zur Zeit t hat die Rakete eine Masse $m(t)$ und Geschwindigkeit $v(t)$. Der Luftwiderstand und jegliche Änderung der Erdbeschleunigung g können ignoriert werden.

(a) [3 Punkte] Mithilfe des Impulssatzes zeigen Sie, dass

$$m \frac{dv}{dt} + U \frac{dm}{dt} = -mg,$$

indem sich die Terme höherer Ordnung wie $dm dv$ vernachlässigen lassen.

Hinweis: Schreiben Sie den Impulssatz als $d\mathbf{p} = \mathbf{F}_{\text{ext}} dt$, wobei $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ die äußere Kraft sei.

Die Rakete wird im Zeitraum dt beschleunigt, sodass die Geschwindigkeit um dv größer wird. Der Anfangsimpuls des ganzen Systems ist deswegen durch

$$\mathbf{p}_0 = mv \hat{\mathbf{e}}_z$$

gegeben. Danach hat das System einen Gesamtimpuls $\mathbf{p}_F$, wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_F &= (m - dm_T)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + (\mathbf{v} + \mathbf{U})dm_T \\ &= [(m - dm_T)(v + dv) + (v - U)dm_T] \hat{\mathbf{e}}_z, \end{aligned}$$

wobei m_T die Masse des ausgestoßenen Treibstoffs ist. Es folgt nun, dass sich die Masse der Rakete um dm reduziert. Das heißt:

$$dm = -dm_T.$$

Deswegen gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_F &= [(m + dm)(v + dv) - (v - U)dm] \hat{\mathbf{e}}_z \\ \implies d\mathbf{p} &= \mathbf{p}_F - \mathbf{p}_0 \\ &= [(m + dm)(v + dv) - (v - U)dm - mv] \hat{\mathbf{e}}_z \\ &= -mg dt \hat{\mathbf{e}}_z, \end{aligned}$$

wobei die äußere Kraft durch $\mathbf{F}_{\text{ext}} = -mg \hat{\mathbf{e}}_z$ gegeben ist.

$$\begin{aligned} \implies mv + mdv + vdm + dmdv - vdm + Udm - mv &= -mg dt \\ \implies mdv + dmdv + Udm &= -mg dt. \end{aligned}$$

Der Term höherer Ordnung $dmdv$ lässt sich vernachlässigen, deswegen gilt

$$\begin{aligned} mdv + Udm &= -mg dt. \\ \implies m \frac{dv}{dt} + U \frac{dm}{dt} &= -mg. \end{aligned}$$

(b) [2 Punkte] Die Rakete hat eine Beschleunigung $\mathbf{a}_R = \alpha g \hat{\mathbf{e}}_z$, wobei α eine positive Konstante sei.

Zeigen Sie nun, dass

$$m(t) = M \exp \left[-\frac{g(\alpha + 1)}{U} t \right],$$

wobei $\exp(x) \equiv e^x$.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \alpha g \\ \Rightarrow m\alpha g + U \frac{dm}{dt} &= -mg \\ \Rightarrow \frac{dm}{dt} &= -\frac{mg(\alpha + 1)}{U} \\ \Rightarrow \int_M^m \frac{dm'}{m'} &= -\frac{g(\alpha + 1)}{U} \int_0^t dt' \\ \Rightarrow \ln \left(\frac{m}{M} \right) &= -\frac{g(\alpha + 1)}{U} t \\ \Rightarrow m(t) &= M \exp \left[-\frac{g(\alpha + 1)}{U} t \right]. \end{aligned}$$

- (c) [4 Punkte] Sei nun $\alpha = 1$. Zeigen Sie, dass die kinetische Energie E_k der Rakete in dem Moment $t = T$, wenn der Treibstoff komplett verbraucht ist, durch

$$E_k = \frac{MU^2(1 - \lambda)}{8} [\ln(1 - \lambda)]^2$$

gegeben ist.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst einen Ausdruck für T .

Zur Zeit $t = T$, hat die Rakete eine Masse $m(T) = M - \lambda M$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow M(1 - \lambda) &= M \exp \left[-\frac{g(\alpha + 1)}{U} T \right] \\ \Rightarrow T &= \frac{-U \ln(1 - \lambda)}{2g}. \end{aligned}$$

Um die kinetische Energie zu berechnen, brauchen wir die Geschwindigkeit der Rakete v . Für $\alpha = 1$, wissen wir aber schon, dass

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g \\ \Rightarrow v(T) &= gT \\ \Rightarrow E_k &= \frac{1}{2} m(T) v^2(T) \\ &= \frac{1}{2} M(1 - \lambda) g^2 T^2 \\ &= \frac{MU^2(1 - \lambda)}{8} [\ln(1 - \lambda)]^2. \end{aligned}$$

blatt05_muster

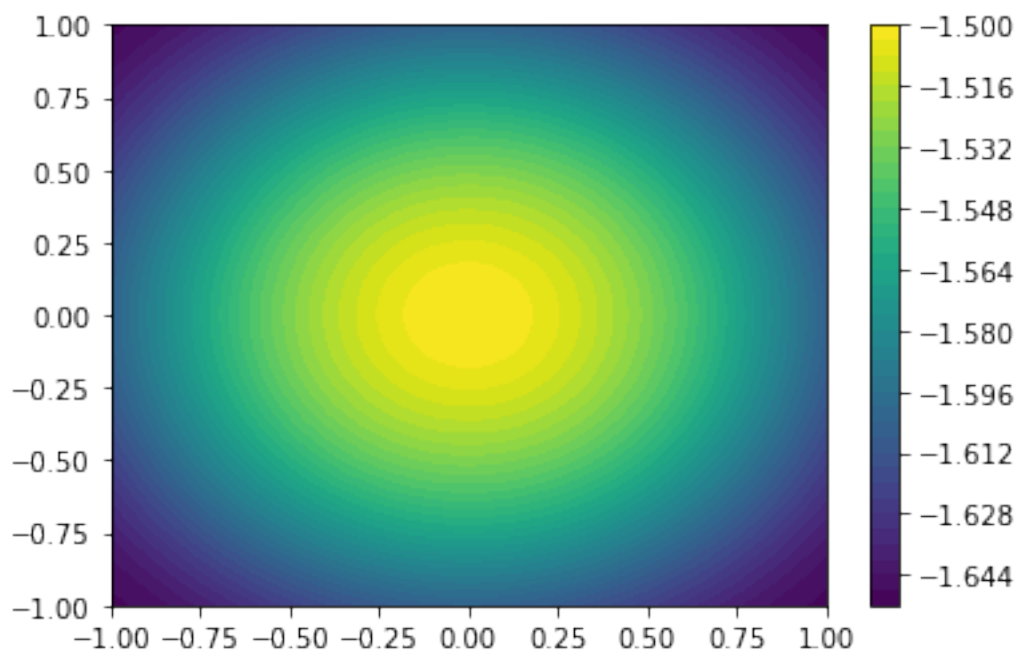
May 10, 2023

```
[4]: import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
[5]: def function_2d( x, y, sigma ):
      c = 1/sigma
      r2 = x**2+y**2
      return -c*(3 - c*r2)*np.exp(0.5*c*r2)
```

```
[6]: x = np.linspace(-1, 1, 50)
y = np.linspace(-1, 1, 50)
X, Y = np.meshgrid(x, y) # erstellt ein grid, auf dem die 2d - funktion
    ↪ausgewertet wird
plt.contourf( X, Y, function_2d(X, Y, 2), 40) # erstellt einen "filled"
    ↪contourplot
plt.colorbar()
```

```
[6]: <matplotlib.colorbar.Colorbar at 0x7f4ed8d47a00>
```



[]: