Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik I WS 2022/23

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl
Mitchell Whittam, David Dams, Benedikt Zerulla

Blatt 6
Abgabe: Mittwoch 14.12.2022

Zur Bearbeitung der Programmieraufgaben dieses Blattes können Sie die Datei blatt06_vorlage.ipynb *als Vorlage nutzen.*

Um alle Punkte zu bekommen, müssen alle Lösungen so weit wie möglich vereinfacht werden.

1. Fourierreihen — 5 Punkte

(a) [4 Punkte] Berechnen Sie die Darstellung der folgenden Funktionen in Form einer Fourierreihe, wobei Sie $f(x)$ als Funktion mit der Periode 1 auffassen können, die im Intervall $-0.5 \leq x < 0.5$ definiert ist

$$\text{(i)}\quad f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{1}{4}, \\ 0 & \frac{1}{4} \leq |x| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \qquad\qquad \text{(ii)}\quad g(x) = \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

(b) [1 Punkt] Plotten Sie mit dem Jupyter-Notebook die Fourier-Darstellung von $f(x)$, indem Sie die auftretende Summe nach $n_{\max} = 5, 10, 100$ abbrechen. Kommentieren Sie das Konvergenzverhalten.

2. Fouriertransformation — 4 Punkte

Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f(x)$, wobei $g(x)$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion ist

$$\text{(i)}\quad f(x) = \left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} - x^n\right) g(x), \quad n > 1 \qquad\qquad \text{(ii)}\quad f(x) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax_n} \delta(x - x_n)$$

Hinweis: Vergleichen Sie mit den im 12. mathematischen Einschub aus der Vorlesung angegebenen Rechenregeln und finden Sie die Fouriertransformierte von $x^n g(x)$. Es ist keine längere Rechnung notwendig.

3. Feder mit Luftwiderstand 9 Punkte

Eine durch die fest verbundene Punktmasse m belastete Feder wird beim Punkt $y(t=0) = y_0 < 0$ losgelassen, sodass m sich in die positive y-Richtung um einen Abstand von $y(t)$ relativ zu y_0 bewegt. Drei Kräfte wirken auf m: $\mathbf{F}_\mathrm{S}$ (die von der Feder ausgeübte Kraft), $\mathbf{F}_\mathrm{G}$ (die Anziehungskraft) und $\mathbf{F}_\mathrm{L}$ (die vom Luftwiderstand ausgeübten Kraft), wobei $k < 0$ und λ und g positive Konstanten sind. Der Gleichgewichtspunkt der Feder befindet sich bei $y = 0$.

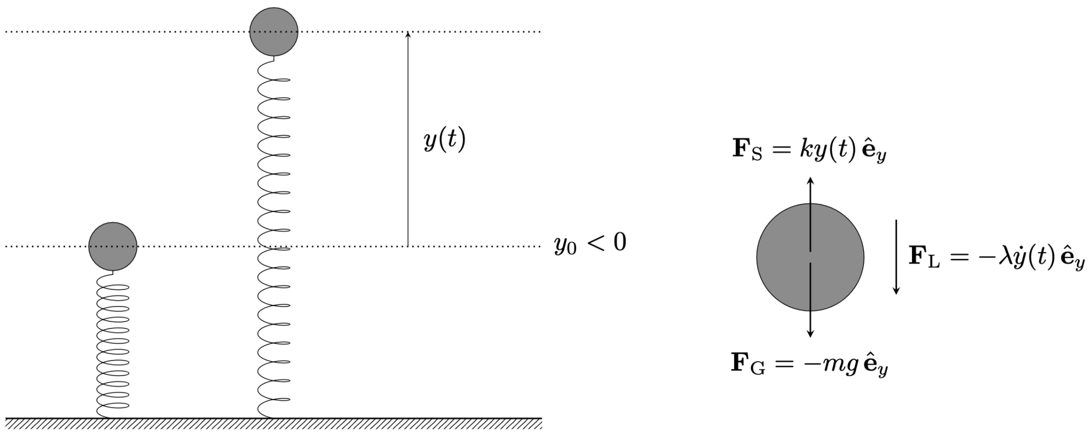

Abbildung 1: Links: das ganze System. Rechts: die Punktmasse und die entspechenden darauf wirkenden Kräfte.

(a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass

$$m\ddot{y}(t) + \lambda\dot{y}(t) - ky(t) = -mg. \tag{1}$$

(b) Die allgemeine Lösung von Gleichung (1) kann als

$$y(t) = y_\mathrm{C}(t) + y_\mathrm{P}(t)$$

geschrieben werden, wobei $y_\mathrm{C}(t)$ die charakteristische Lösung und $y_\mathrm{P}(t)$ die partikuläre Lösung sei. Es sei dazu gegeben, dass

$$y_\mathrm{P}(t) = \gamma, \quad \gamma = \mathrm{const},$$

$$m\ddot{y}_\mathrm{P} + \lambda\dot{y}_\mathrm{P}(t) - ky_\mathrm{P}(t) = -mg$$

und

$$m\ddot{y}_\mathrm{C} + \lambda\dot{y}_\mathrm{C}(t) - ky_\mathrm{C}(t) = 0.$$

(i) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass

$$\gamma = \frac{mg}{k}.$$

(ii) [6 Punkte] Gegeben sei eine weitere Anfangsbedingung

$$\dot{y}(t=0) = 0.$$

Mithilfe des Ansatzes

$$y_\mathrm{C}(t) = e^{\alpha t}$$

zeigen Sie für $\lambda^2 > |4mk|$, dass

$$y(t) = \frac{\gamma - y_0}{\alpha_1 - \alpha_2}\left[\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t} + \frac{\gamma(\alpha_1 - \alpha_2)}{\gamma - y_0}\right],$$

wobei

$$\alpha_1 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4mk}}{2m}, \quad \alpha_2 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4mk}}{2m}.$$